

# Équations aux Dérivées Partielles

Pedro Ferreira et Sylvie Mas-Gallic

11 décembre 2001

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Exemple d'une équation aux dérivées partielles . . . . .	3
1.2	Rappels sur la dérivation partielle . . . . .	5
1.2.1	Fonctions vectorielles . . . . .	8
1.3	Équations aux dérivées partielles linéaires . . . . .	10
<b>2</b>	<b>L'équation de transport</b>	<b>12</b>
2.1	L'équation de transport à vitesse variable . . . . .	13
2.2	Un premier exemple de condition de frontière . . . . .	14
2.3	L'équation de transport conservative . . . . .	16
2.4	Équation de transport en dimension supérieure . . . . .	18
2.5	Solutions auto-semblables . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Équation des ondes</b>	<b>22</b>
3.1	Le formule de d'Alembert . . . . .	25
3.2	Conditions aux limites – Le cas de la demi-droite . . . . .	26
3.3	Solutions à variables séparées . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Introduction à la série de Fourier</b>	<b>29</b>
4.1	Rappels sur les séries . . . . .	29
4.2	Rappels sur les séries de fonctions . . . . .	31
4.3	Développement en polynômes trigonométriques . . . . .	31
4.4	Série de Fourier des fonctions à carré intégrable . . . . .	35
4.5	Application à l'équation des ondes . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Équations de Maxwell</b>	<b>39</b>
5.1	Recherche d'ondes planes . . . . .	39
5.2	Réduction à l'équation des ondes . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Équations de Laplace et Poisson</b>	<b>42</b>
6.1	Solutions à variables séparées . . . . .	45
6.2	Solutions périodiques . . . . .	46

<b>7</b>	<b>Équation de la chaleur</b>	<b>48</b>
7.1	Propriétés des solutions de l'équation de la chaleur . . . . .	49
7.2	Solutions auto-semblables . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Classification des Équations aux Dérivées Partielles</b>	<b>53</b>

# Chapitre 1

## Introduction

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc. ), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés et en finance pour étudier les produits dérivés (options et obligations).

Les équations aux dérivées partielles sont un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie des distributions.

Dans la plupart des cas il est très difficile, voir impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles. Dans certains cas on arrive à montrer que le problème est bien posé (c'est-à-dire qu'il admet une solution unique) et on peut, parfois, calculer des approximations numériques des solutions.

### 1.1 Exemple d'une équation aux dérivées partielles

On va montrer comment, à partir des lois de la thermodynamique on peut déduire une équation aux dérivées partielles dont les solutions décrivent la température d'un corps en équilibre thermique.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  qui décrit la position dans l'espace du corps, soit  $T(\vec{x})$  la fonction de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  qui décrit la température en chaque point. Soit  $\vec{\Phi}(\vec{x}) = (\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{x}), \Phi_3(\vec{x}))$  le champ vectoriel qui décrit le flux de chaleur au point  $\vec{x}$ . Soit  $f(\vec{x})$  la densité volumique de chaleur reçue au point  $\vec{x}$ .

L'équilibre thermique d'un petit volume  $\omega \subset \Omega$  signifie que le flux de chaleur qui traverse la surface de  $\omega$  est égal à la quantité de chaleur reçue, si qui se traduit

par :

$$\int_{\partial\omega} \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\omega} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

où  $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$  est la normale extérieure unitaire à la surface  $\partial\omega$  au point  $\vec{x} \in \partial\omega$ . En utilisant la formule de la divergence (qui n'est autre chose que la généralisation de la formule d'intégration par parties) on conclut que

$$\int_{\partial\omega} \vec{\Phi}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \, ds = \int_{\omega} \operatorname{div}(\vec{\Phi}) \, d\vec{x}$$

donc :

$$(1.1) \quad \int_{\omega} \operatorname{div}(\vec{\Phi}) \, d\vec{x} = \int_{\omega} f(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

Cette équation est vérifiée pour tout petit volume  $\omega \subset \Omega$ , on sait alors que l'équilibre thermique peut être modélisé par l'équation :

$$(1.2) \quad \operatorname{div}(\vec{\Phi})(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega.$$

Si on prend en compte une loi de comportement on peut simplifier cette équation ; la loi de Fourier dit que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température, ce qui s'écrit

$$(1.3) \quad \vec{\Phi}(\vec{x}) = -\kappa(\vec{x})\nabla T(\vec{x}),$$

la constante de proportionnalité  $\kappa(\vec{x})$  s'appelle la conductivité thermique et dépend exclusivement de la nature du matériel. En remplaçant (1.3) dans (1.2) on obtient

$$(1.4) \quad -\operatorname{div}(\kappa(\vec{x})\nabla T) = f,$$

qui est équivalent, dans le cas où  $\kappa(x)$  est constant, à

$$-\kappa\Delta T = f.$$

Pour que ce problème soit bien posé on doit connaître la température ou le flux de chaleur dans frontière du domaine, on considère deux types de conditions :

1. Une *condition de Dirichlet* où on impose la température sur le bord du domaine :

$$T(\vec{x}) = T_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega,$$

2. Une *condition de Neumann* où on impose un flux de chaleur à travers la frontière :

$$-\kappa(\vec{x})\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = \theta_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega.$$

## 1.2 Rappels sur la dérivation partielle

Soit  $f$  est une fonction réelle définie dans  $\mathbb{R}^N$ . A l'aide d'un repère on peut écrire un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  comme  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  où les  $x_i$  sont des réels.

**Définition 1.** La  $i$ -ème dérivée partielle de  $f$  au point  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + h, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_N) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_N)}{h}$$

si elle existe.

Un concept important est celui de gradient :

**Définition 2.** Si toutes les dérivées partielles d'une fonction  $f$  sont définies en un point de l'espace  $\mathbb{R}^N$  alors on appelle gradient de  $f$  au point  $(x_1, \dots, x_N)$  le vecteur :

$$\nabla f(x_1, \dots, x_N) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_N), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_N) \right)$$

Le gradient a quelques propriétés importantes :

- il est indépendant du repère,
- il pointe dans la direction de plus forte croissance de la fonction,
- il est perpendiculaire aux lignes de champ définies par  $f(x_1, \dots, x_N) = c$ , où  $c$  est une constante quelconque.

**Exemple 1.** On considère la fonction  $f(x, y) = xy$ , on calcule ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)y_0 - x_0y_0}{h} = y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0(y_0 + h) - x_0y_0}{h} = x_0$$

le gradient est égal à :

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

les lignes de champ pour cette fonction sont les hyperboles :

$$\{xy = c\}$$

Si on prend, par exemple le point  $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$  situé sur la ligne de champ  $\{f(x, y) = 1\}$ , on vérifie alors que le vecteur  $\nabla f(1, 1) = (1, 1)$  est perpendiculaire à la courbe  $\{y = 1/x\}$ .

Pour étudier la variation d'une fonction de plusieurs variables dans une direction donnée il est naturel d'introduire la dérivée directionnelle :

**Définition 3.** La dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction du vecteur  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_N)$  au point  $(x_1, \dots, x_N)$  est définie par :

$$D_{\vec{v}}f(x_1, \dots, x_N) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

**Exemple 2.** Toujours pour  $f(x, y) = xy$  calculons la dérivée dans la direction  $(1, 1)$  :

$$\begin{aligned} D_{(1,1)}f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(y+h) - xy}{h} \\ &= x + y + \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= x + y \end{aligned}$$

**Proposition 1.** Si toutes les dérivées partielles de  $f$  au point  $(x_1, \dots, x_N)$  sont définies alors :

$$D_{\vec{v}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v}$$

où  $\cdot$  est le produit scalaire de deux vecteurs.

La dérivée partielle d'une fonction réelle est une fonction réelle, on peut ainsi définir facilement les dérivées d'ordre supérieure :

**Définition 4.** La dérivée partielle de la fonction  $f$  d'ordre  $j$  par rapport aux variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_j}$  est définie par :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_j}} \right)$$

Ceci est plus facilement compréhensible avec un exemple en ordre 2 :

**Exemple 3.** Considérons la fonction de deux variables  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , calculons la dérivée croisée d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0$$

Nous allons maintenant énoncer un résultat pour les dérivées d'ordre 2 qui pourra facilement se généraliser à des ordres supérieures :

**Proposition 2.** Les dérivées partielles d'ordre 2 vérifient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

si ses dérivées sont des fonctions continues.

Pour la recherche des points extrêmes d'une fonction de plusieurs variables il est intéressant de définir la matrice Hessienne :

**Définition 5 (Matrice Hessienne).** *La matrice Hessienne d'une fonction  $f$  de  $N$  variables est la matrice d'ordre  $N$  :*

$$H_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(\vec{x}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Comme on a vu auparavant, cette matrice est symétrique si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues.

**Proposition 3.** *Si  $f$  est une fonction de  $N$  variables de classe  $C^2$  et si  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$  est un point extrême de  $f$  (c'est-à-dire  $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ ), alors :*

1. *si la matrice  $H_f(\vec{x})$  est définie positive le point  $\vec{x}$  est un minimum local de  $f$ ,*
2. *si la matrice  $H_f(\vec{x})$  est définie négative le point  $\vec{x}$  est un maximum local de  $f$ .*

**Exemple 4.** *On reprend la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , son gradient est :*

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

$(0, 0)$  est un point extrême, et

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et  $H_f(0, 0)$  définie positive, car elle est diagonale à termes positifs, donc  $(0, 0)$  est un minimum de  $f$ .

Un opérateur différentielle d'ordre 2 très important est le Laplacien, il est invariant par changement de repère, et de ce fait il intervient en de nombreuses équations aux dérivées partielles.

**Définition 6.** *Le Laplacien d'une fonction de  $N$  variables  $f$  est :*

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = \text{trace } H_f(\vec{x})$$

Pour des fonctions de  $N$  variables on rappelle le développement de Taylor d'ordre 2 au tour d'un point :

**Proposition 4 (Développement de Taylor).** *Si  $u$  est une fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  dans un voisinage du point  $\vec{x}$ , alors pour tout  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  suffisamment*

petit on a :

$$u(\vec{x} + \vec{h}) = u(\vec{x}) + h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + h_N \frac{\partial u}{\partial x_N} + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\xi) + \cdots + C_i^N h_i h_{N-i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_{N-i}}(\xi) + \cdots + h_N^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}(\xi) \right)$$

où  $\xi$  est un point de  $\mathbb{R}^2$  situé dans le segment de droite qui relie  $\vec{x}$  à  $\vec{x} + \vec{h}$  et  $C_i^N$  est le coefficient binomial.

Dans le cas des fonctions d'une variable la règle de dérivation d'une fonction composée s'écrit :

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de cette formule est :

**Proposition 5 (Dérivation de la fonction composée en plusieurs variables).** Soit  $f(x_1, \dots, x_N)$  une fonction réelle de  $N$  variables, supposons que chaque  $x_i = g_i(r_1, \dots, r_M)$  est une fonction de  $r_1, \dots, r_M$ , soit

$$\tilde{f}(r_1, \dots, r_M) = f(g_1(r_1, \dots, r_M), \dots, g_N(r_1, \dots, r_M)),$$

notons ( $x_i^* = g_i(r_1^*, \dots, r_M^*)$ ), alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r_j}(r_1^*, \dots, r_M^*) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, \dots, x_N^*) \frac{\partial g_1}{\partial r_j}(r_1^*, \dots, r_M^*) + \cdots + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_1^*, \dots, x_N^*) \frac{\partial g_N}{\partial r_j}(r_1^*, \dots, r_M^*) \end{aligned}$$

**Exemple 5.** On considère la fonction de deux variables  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , où  $x(r, \theta) = r \cos \theta$  et  $y(r, \theta) = r \sin \theta$  et la fonction  $g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ . On calcule la dérivée partielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r^*, \theta^*) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \frac{\partial x}{\partial r}(r^*, \theta^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \frac{\partial y}{\partial r}(r^*, \theta^*) \\ &= 2x^* \cos \theta^* + 2y^* \sin \theta^* \\ &= 2r^* \cos^2 \theta^* + 2r^* \sin^2 \theta^* \\ &= 2r^* \end{aligned}$$

## 1.2.1 Fonctions vectorielles

Une fonction vectorielle est une fonction à valeurs en  $\mathbb{R}^N$ , on va étudier le cas particulier des fonctions de  $\mathbb{R}^N$  en  $\mathbb{R}^N$ . Pour ces fonctions on définit la matrice Jacobienne :

**Définition 7.** Soit  $\vec{f}$  une fonction de  $N$  variables réelles à valeurs en  $\mathbb{R}^N$ . on suppose qu'une base a été fixé en  $\mathbb{R}^N$ , on définit la matrice Jacobienne de  $\vec{f}$  comme :

$$J_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

de terme général :

$$(J_f(\vec{x}))_{i,j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x})$$

La trace de la matrice Jacobienne est une fonction scalaire. C'est un opérateur différentiel d'ordre 1 qu'on appelle la *divergence*.

**Définition 8.** La divergence de la fonction  $\vec{f}$  de  $D \subset \mathbb{R}^N$  en  $\mathbb{R}^N$  est une fonction réelle définie par :

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{trace} J_f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

La divergence est parfois notée comme :

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}$$

c'est un abus de notation car le gradient n'a de sens que si on l'applique à une fonction. En dimension 3 en prenant quelques libertés on peut écrire :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

s'il était un vecteur on aurait alors :

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

On sait de l'algèbre linéaire que la trace d'une matrice est invariante par changement de coordonnées, ceci entraîne que la divergence ne dépend pas du système de coordonnées choisi. On va montrer ce résultat.

**Théorème 1.** La divergence d'un champ vectoriel est une fonction scalaire, c'est-à-dire, les valeurs de  $\operatorname{div} \vec{f}$  ne dépendent que des points de l'espace et de  $\vec{f}$ , ils sont indépendants des coordonnées.

*Démonstration.* On va montrer ce résultat pour une fonction vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ . On considère un point de  $\mathbb{R}^3$  qui a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans une base et  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  dans une nouvelle base. On note  $(f_1^*, f_2^*, f_3^*)$  les composantes de  $\vec{f}$  dans la nouvelle base. On cherche à montrer que :

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial f_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial f_3^*}{\partial x_3^*} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

La transformation de coordonnées peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\vec{x}^* = A\vec{x} + b \Leftrightarrow x_j^* = \sum_{k=1}^3 a_{jk}x_k + b_j$$

où  $A$  est une matrice orthogonale ( $A^{-1} = A^T$ ). En dérivant on conclut :

$$\frac{\partial x_k^*}{\partial x_j} = a_{kj}$$

On a évidemment :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= A^T \vec{f}^* - \vec{b} \\ f_j &= \sum_{l=1}^3 a_{lj} f_l^* - b_j \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k^*} = \sum_{l=1}^3 a_{lj} \frac{\partial f_l^*}{\partial x_k^*}$$

donc :

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 a_{kj} \frac{\partial f_j}{\partial x_k^*} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{lj} a_{kj} \frac{\partial f_l^*}{\partial x_k^*}$$

La matrice  $A$  étant orthogonale on a  $A^T A = I_3$  et donc :

$$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{lj} a_{kj} \frac{\partial f_l^*}{\partial x_k^*} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k^*}{\partial x_k^*}$$

□

### 1.3 Équations aux dérivées partielles linéaires

Une équation aux dérivées partielles est linéaire si l'ensemble de ses solutions forme un espace vectoriel. Cette notion mérite néanmoins des précisions. On appelle aussi linéaire une équation avec un second membre si l'équation homogène associée (c'est-à-dire avec second membre égal à zéro) est linéaire.

Vérifions que l'équation (1.4) est bien linéaire, l'équation homogène associée est :

$$\operatorname{div}(\kappa(\vec{x}\nabla T)) = 0$$

soient  $T_1$  et  $T_2$  deux solutions de cette équation, alors :

$$\operatorname{div}(\kappa(\vec{x}\nabla(\alpha T_1 + \beta T_2))) = \alpha \operatorname{div}(\kappa(\vec{x}\nabla T_1)) + \beta \operatorname{div}(\kappa(\vec{x}\nabla T_2)) = 0$$

ce qui montre que la combinaison linéaire des solutions aussi est une solution.

**Exemple 6.** Montrons que la fonction  $T(x, y) = x^2 + y^2$  est bien solution de l'équation (1.4) en  $\mathbb{R}^2$  pour  $\kappa(x, y) = 1$  et  $f(x, y) = -4$  :

$$-\kappa(x, y)\Delta T = -\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -2 - 2 = -4 = f(x, y)$$

**Exemple 7.** L'équation  $\Delta f = f^2$  n'est pas linéaire, en effet, si  $f$  est solution et  $\alpha$  est une constante réelle alors :

$$\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f = \alpha f^2 \neq (\alpha f)^2$$

si  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq 1$  et  $f \neq 0$  et  $f \neq 1$ .

# Chapitre 2

## L'équation de transport

L'équation aux dérivées partielles la plus simple est l'équation de transport dans le demi-plan, il s'agit d'une équation linéaire d'évolution du premier ordre.

On cherche une fonction  $u$  qui vérifie :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les solutions sont des fonctions définies dans  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  dont la frontière est  $\partial D = \mathbb{R} \times \{0\}$ .

Pour ce problème les solutions sont très facilement calculables :

**Théorème 2.** *Si  $u_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe une unique solution différentiable  $u$  du problème de Cauchy en  $(x, t)$ , elle est donnée par :*

$$(2.2) \quad u(x, t) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0$$

*Démonstration.* On définit les caractéristiques comme les courbes de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $(X(t), t)$  où la fonction  $X(t)$  est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX}{dt} = c.$$

Le long des caractéristiques, la solution de l'équation (2.1) vérifie :

$$\frac{d}{dt}(u(X(t), t)) = \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques.

Soit  $(x^*, t^*)$  un point du plan avec  $t^* > 0$ . Soit  $X^*(t)$  la caractéristique passant par ce point, alors, elle vérifie :

$$\begin{cases} \frac{dX^*}{dt} = c \\ X^*(t^*) = x^* \end{cases}$$

la solution est alors :

$$X^*(t) = ct + x^* - ct^*.$$

Pour  $t = 0$  ceci donne :

$$X^*(0) = x^* - ct^*$$

et on a :

$$u(x^*, t^*) = u(X^*(0), 0) = u(x^* - ct^*, 0) = u_0(x^* - ct^*).$$

□

## 2.1 L'équation de transport à vitesse variable

On considère maintenant le cas de l'équation de transport où la vitesse varie en temps et en espace. On cherche des solutions  $u$  définies dans  $]a, b[ \times \mathbb{R}_+^*$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & \forall x \in ]a, b[ \quad \forall t > 0 \\ x(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in ]a, b[, \end{cases}$$

on suppose que  $v(a, t) = v(b, t) = 0$ .

La technique qu'on a utilisée pour montrer l'existence et l'unicité pour l'équation de transport à vitesse constante peut se généraliser au cas où la vitesse n'est pas constante. On cherche les courbes caractéristiques qui sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = v(X(t), t)$$

le long de ces courbes on a :

$$\frac{d}{dt}(u(X(t), t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) \frac{dX}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X(t), t) = 0$$

ceci veut dire que les solutions sont constantes le long des caractéristiques, il suffit alors de prendre en compte la condition initiale. La solution au point  $(x_0, t_0)$  est égale à la valeur de  $u_0(x^*)$  où  $x^*$  est la valeur pour  $t = 0$  de la caractéristique qui passe par le point  $(x_0, t_0)$ , en d'autres termes :

$$u(x_0, t_0) = u_0(x^*), \quad x^* = X(0)$$

et  $X(t)$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = v(x, t) \\ X(x_0) = t_0 \end{cases}$$

**Exemple 8.** Cherchons les solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x(1-x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{sur } ]0, 1[ \times ]0, \infty[ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } ]0, 1[ \end{cases}$$

au point  $(x_0, t_0)$ , la caractéristique qui passe par ce point est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(1-X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on peut résoudre cette équation différentielle par séparation de variables :

$$\frac{dX}{X(1-X)} = dt$$

si on intègre on obtient :

$$\int_{x_0}^X \frac{ds}{s(1-s)} = \int_{t_0}^t dw$$

ce qui donne :

$$-\log \left| \frac{1-X}{X} \right| + \log \left| \frac{1-x_0}{x_0} \right| = t - t_0$$

et l'expression pour la caractéristique :

$$X(t) = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{t_0-t}}$$

La solution de (2.4) est alors :

$$u(x_0, t_0) = u_0 \left( \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{t_0-t}} \right)$$

## 2.2 Un premier exemple de condition de frontière

On va montrer un premier exemple d'une équation aux dérivées partielles avec condition de frontière. Pour simplifier on regardera uniquement le cas de l'équation de transport à vitesse constante pour  $x$  positif

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall t > 0, \quad x > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \geq 0 \\ u(0, t) = g(t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

Dans ce cas on peut très facilement construire la solution, il suffit de généraliser la démonstration du même résultat pour l'équation de transport à vitesse constante dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 3.** *Le problème (2.5) a pour solution :*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - ct) & \text{si } x - ct \geq 0 \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } x - ct < 0 \end{cases}$$

Pour se convaincre de ce résultat il suffit de regarder la figure 2.1, et de noter que la ligne pointillé représente la caractéristique qui passe par le point  $(0, 0)$ , c'est-à-dire, la demi-droite  $x = ct$ ,  $t > 0$ . La partie du domaine à droite de cette caractéristique vérifie  $x - ct > 0$  et la partie à gauche  $x - ct < 0$ . Pour cette dernière partie les caractéristiques touchent l'axe  $x = 0$  avant de toucher l'axe  $t = 0$ .

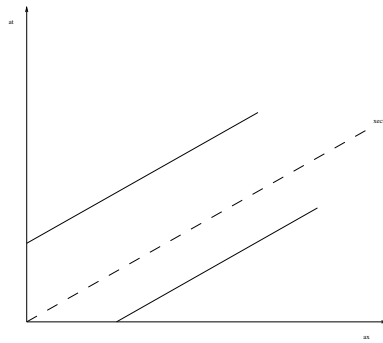


FIG. 2.1 – Les caractéristiques et les conditions de frontière

On ne traitera pas le cas général d'un domaine borné où la vitesse ne s'annule pas sur les bords, on peut néanmoins s'apercevoir que le problème peut advenir si une courbe caractéristique touche un point  $(a, t)$  où  $(b, t)$  pour  $t > 0$ . Il faut alors ajouter une condition de frontière à l'équation et l'utiliser pour remonter l'information. Ceci se comprend mieux sur la figure 2.2.

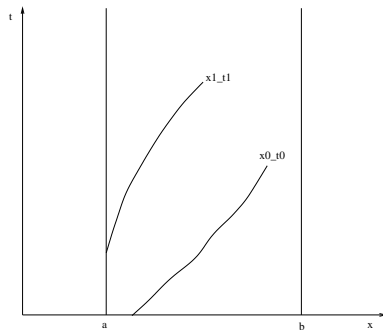


FIG. 2.2 – Les caractéristiques et les conditions de frontière

## 2.3 L'équation de transport conservative

On étudie maintenant une équation proche des équations qu'on vient d'étudier. Il s'agit de l'équation de transport conservative :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)u) (x, t) = 0 & \text{sur } x \in ]a, b[ \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in ]a, b[ \end{cases}$$

$v(x, t)$  est la vitesse qui est donnée et vérifie  $v(a) = v(b) = 0$  et  $u_0$  est une fonction donnée,

On va voir pourquoi on appelle cette équation conservative :

**Proposition 6.** *L'intégrale en  $x$  de la solution de l'équation (2.6) se conserve dans le temps, c'est-à-dire :*

$$\int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b u_0(x) dx \quad \forall t > 0$$

*Démonstration.* Comme  $u$  est solution de (2.6) on a :

$$\int_a^b \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)u) (x, t) \right) dx = 0$$

on a :

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)u) (x, t) dx = [v(x, t)u(x, t)]_a^b = 0$$

car  $v(a, t) = v(b, t) = 0$ . On conclue que :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = 0$$

□

On remarquera que cette équation possède un terme supplémentaire, par rapport à l'équation de transport ( $\frac{\partial v}{\partial x} u$ ) et de ce fait on ne peut plus dire que la solution est constante le long des caractéristiques. Par ailleurs, pour l'équation de transport à vitesse non constante, malgré le fait que la solution soit ponctuellement constante le long des caractéristiques l'intégrale, ne se conserve pas, en effet, de :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx + \int_a^b v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) dx = 0$$

on conclue que :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} (x, t) u(x, t) dx$$

où on a, bien sur, utilisé le fait que  $v(a, t) = v(b, t) = 0$ .

Si on écrit l'équation conservative le long d'une caractéristique on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(X(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}(v(X(t), t)u(X(t), t)) = 0.$$

On note maintenant que

$$\frac{\partial}{\partial t}u(X(t), t) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) = \frac{d}{dt}u(X(t), t)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt}u(X(t), t) + \frac{\partial v}{\partial x}(X(t), t)u(X(t), t) = 0.$$

Si on définit la fonction :

$$w(t) = u(X(t), t)e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau}$$

elle vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \left( \frac{du}{dt}(X(t), t) + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) (X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t) + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) (X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t}(X(t), t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v(X(t), t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X(t), t) \right) e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

$$u(X(t), t)e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} = u_0(X(0)).$$

On a montré :

**Proposition 7.** *Le long d'une caractéristique la solution de l'équation (2.6) vérifie :*

$$u(X(t), t) = u_0(X(0))e^{-\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau}$$

**Exemple 9.** *On va résoudre l'équation :*

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(xtu) = 0 & \forall t > 0 \quad \forall x > 0 \\ u(x, 0) = x & \forall x > 0. \end{cases}$$

Cherchons d'abord la caractéristique  $X(\theta)$  passant par le point  $(x, t)$ . Elle est solution de

$$X'(\theta) = X(\theta)\theta,$$

il s'agit d'une équation à variables séparées sa solution est :

$$X(\theta) = ce^{\frac{\theta^2}{2}}$$

on détermine la constante  $c$  à partir de l'égalité :

$$X(t) = x$$

ce qui donne

$$c = xe^{-\frac{t^2}{2}}$$

et

$$X(\theta) = xe^{\frac{\theta^2 - t^2}{2}}.$$

La vitesse et sa dérivée partielle en  $x$  sont données par

$$v(x, t) = xt \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = t$$

et la solution de (2.7) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(X(0))e^{\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(X(\tau), \tau) d\tau} \\ &= u_0(xe^{-\frac{t^2}{2}})e^{\int_0^t \tau d\tau} \\ &= xe^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}} \\ &= xe^{-t^2} \end{aligned}$$

## 2.4 Équation de transport en dimension supérieure

On cherche maintenant à traiter l'équation de transport (aussi appelée équation de vitesse de diffusion) pour une dimension d'espace supérieure à 1. On se pose la question de savoir quel opérateur généralise la dérivée spatiale  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Il est bien évident que l'équation doit rester d'ordre 1 (on cherche à transporter une fonction) et que, en plus, elle ne doit pas changer si on change de repère (on dit qu'elle est invariante par changement de repère). On a vu que l'opérateur  $\text{div}$  vérifie ces deux conditions. On présente uniquement la dimension 3.

L'équation de transport en forme conservative s'écrit alors :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \text{div}_{\vec{x}}(\rho \vec{V})(\vec{x}, t) = 0 & \vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^3 \quad t > 0 \\ \rho(\vec{x}, 0) = \rho_0(\vec{x}) \end{cases}$$

où  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{V}(\vec{x}, t)$  est une fonction vectorielle (de  $\mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[$  en  $\mathbb{R}^3$ ) qui représente la vitesse, et  $\rho_0(\vec{x})$  est une fonction scalaire qui représente la

condition initiale. Notons que dans cette équation la divergence prend en compte uniquement les trois premières variables (les variables spatiales), d'où la notation  $\text{div}_{\vec{x}}$ .

Pour trouver les solutions on applique une fois de plus la méthode des caractéristiques qui nous permet de nous ramener à une équation différentielle ordinaire. On cherche alors une fonction  $\vec{X}(t)$  tel que le long de la ligne de  $\mathbb{R}^4$ ,  $(\vec{X}(t), t)$  l'équation

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) \right) (\vec{x}, t) = 0$$

on ait une expression simple pour la solution.

Dans le cas qui nous concerne on a

$$\frac{d}{dt} \left( \rho(\vec{X}(t), t) e^{\int_0^t \text{div}_{\vec{x}}(\vec{V}(\vec{X}(s), s)) ds} \right) = 0$$

ce qui implique, comme en dimension 1

$$(2.9) \quad \rho(\vec{X}(t), t) e^{\int_0^t \text{div}_{\vec{x}}(\vec{V}(\vec{X}(s), s)) ds} = \rho(\vec{X}(0), 0).$$

Notons que si  $\text{div}_{\vec{x}} \vec{V} = 0$  alors  $\rho$  est constant le long des caractéristiques.

Les caractéristiques sont maintenant des fonctions vectorielles, elles sont définies par un système d'équations différentielles ordinaires :

**Définition 9.** *La courbe caractéristique qui passe par le point  $(\vec{x}^*, t^*)$  pour l'équation de transport en  $\mathbb{R}^3$  de vitesse variable  $\vec{V}(\vec{x}, t)$  sont les solutions du système d'équations différentielles ordinaires :*

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{X}}{dt}(t) = \vec{V}(\vec{X}(t), t) \\ \vec{X}(t^*) = \vec{x}^* \end{cases}$$

On voit immédiatement que le long des caractéristiques on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{X}(t), t) + \text{div}_{\vec{x}}(\rho \vec{V})(\vec{X}(t), t) = 0,$$

en effet, (2.10) implique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho(\vec{X}(t), t)) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{X}(t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\vec{X}(t), t) \frac{dX_i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{X}(t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\vec{X}(t), t) V_i \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(\vec{X}(t), t) V_i + \rho \text{div}_{\vec{x}} \vec{V} = \text{div}_{\vec{x}}(\rho \vec{V})$$

ce qui entraîne :

$$\frac{d}{dt}(\rho(\vec{X}(t), t)) + (\rho \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{V})(\vec{X}(t), t) = 0$$

## 2.5 Solutions auto-semblables

Pour terminer ce chapitre on va présenter la notion de solution auto-semblable et l'appliquer à l'équation de transport à vitesse constante. On appelle auto-semblable une fonction qui est invariante par un changement d'échelle en temps. Ce type de fonctions est très important en physique car elles modélisent des phénomènes qui sont indépendants de l'échelle de mesure.

La méthode de recherche de solutions auto-semblables consiste à imposer une certaine forme à la solution recherchée, et de ce fait à transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire. Voyons ceci avec un exemple.

On cherche des solutions de l'équation (2.1) qui vérifient :

$$(2.11) \quad u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

où  $f$  est une fonction quelconque,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes à choisir pour que les solutions existent.

Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 de  $u$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \beta t^{\alpha-\beta-1} x f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = t^{\alpha-\beta} f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

L'équation (2.1) devient alors :

$$\alpha t^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + (ct^{\alpha-\beta} - \beta t^{\alpha-\beta-1} x) f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0$$

en divisant par  $t^{\alpha-1}$  on obtient :

$$\alpha f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + (ct^{1-\beta} - \beta t^{-\beta} x) f'\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = 0$$

si on choisit  $\beta = 1$  et  $y = x/t$  on se ramène à l'équation différentielle ordinaire :

$$\alpha f(y) + (c - y) f'(y) = 0$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\alpha}{y - c} \Rightarrow \ln |f| = \alpha \ln |y - c| + \lambda_0$$

ou  $\lambda_0$  est une constante d'intégration. On conclue que une solution auto-semblable de l'équation de transport à vitesse constante est :

$$u(x, t) = \lambda t^\alpha \left| \frac{x}{t} - c \right|^\alpha = \lambda |x - ct|^\alpha$$

$\lambda$  est une constante à déterminer à partir des conditions initiales. La solution retrouvée dépend uniquement de  $x - ct$ .

# Chapitre 3

## Équation des ondes

L'équation des ondes en  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

elle modélise la propagation d'une onde dans un milieu infini. La constante  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions  $u_0$  et  $u_1$  sont respectivement, l'état la vitesse initiale.

On établira tout d'abord un lien entre cette équation et l'équation de transport. Introduisons deux nouvelles fonctions inconnues,  $v_1$  et  $v_2$ , qui sont liées à  $u$  par les égalités :

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial u}{\partial t} \\ v_2 = c \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

et considérons le système de deux équations aux dérivées partielles suivant :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} - c \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - c \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

où on a fait abstraction des conditions initiales. En remplaçant les expressions pour  $v_1$  et  $v_2$  dans (3.2) on voit que la première équation est équivalente à l'équation des ondes et la deuxième à l'équation de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

qui est satisfaite par toute fonction de classe  $C^2$ . Le changement de variables qu'on a pris n'est le seul possible, en effet, on aurait aussi pu prendre  $v_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $v_2 = -c \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Le système (3.2) est composé de deux équations de transport couplées, de vitesse constante  $-c$ , on peut le récrire en forme matricielle :

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + cA \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \quad \text{où } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

On notera que si on diagonalise la matrice  $A$  alors les deux équations de transport seront découplées, ce qui nous permettra l'utilisation des résultats qu'on a montré pour l'équation de transport à vitesse constante. Cherchons les valeurs propres de  $A$ , ceux-ci sont solution de l'équation :

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

c'est à dire  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$ . Les vecteurs propres sont les solutions de :

$$x_1 + x_2 = 0$$

et de :

$$x_1 - x_2 = 0$$

on choisit alors les vecteurs propres de norme 1 :  $(1/\sqrt{2})(1, -1)$  et  $(1/\sqrt{2})(1, 1)$ , ceci donne alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si on définit une nouvelle variable :

$$w = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

on a :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ w_2 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2) \end{cases}$$

si on note  $P$  l'inverse de la matrice :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alors le système (3.3) s'écrit :

$$P \frac{\partial w}{\partial t} + cAP \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

en multipliant par  $P^{-1}$  on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

ce qui, écrit en coordonnées, est

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ceci nous montre tout de suite le besoin d'avoir 2 conditions initiales.

On a ainsi obtenu 2 équations de transport découplées à vitesse de propagation opposées. La technique utilisée est similaire à celle qu'on utilise pour les équations différentielles ordinaires où on réduit une équation d'ordre 2 à un système de 2 équations d'ordre 1.

Pour  $t = 0$  on a les conditions initiales  $u(x, 0) = u_0(x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ , par définition de  $v_1$  et  $v_2$  ceci donne  $v(x, 0) = (u_1(x), cu'_0(x))$ . Passons en variables  $w$  :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ w(x, 0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1(x) + cu'_0(x) \\ -u_1(x) + cu'_0(x) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les solutions de (3.5) sont alors :

$$\begin{cases} w_1(x, t) = w_{1,0}(x - ct) = \frac{1}{2}(u_1(x - ct) + cu'_0(x - ct)) \\ w_2(x, t) = w_{2,0}(x + ct) = \frac{1}{2}(-u_1(x + ct) + cu'_0(x + ct)) \end{cases}$$

en variables initiales on a :

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}(u_1(x - ct) + cu'_0(x - ct)) - \frac{1}{2}(-u_1(x + ct) + cu'_0(x + ct)) \\ v_2(x, t) &= c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(u_1(x + ct) + cu'_0(x + ct)) + \frac{1}{2}(-u_1(x - ct) + cu'_0(x - ct)). \end{aligned}$$

On a résolu un problème en se ramenant à une situation connue.

### 3.1 Le formule de d'Alembert

Les résultats de la section précédente montrent que les solutions de l'équation des ondes dépendent exclusivement de  $x - ct$  et de  $x + ct$  et non plus de  $x$  et de  $t$  indépendamment.

On va donner une autre caractérisation des solutions de l'équation des ondes en  $\mathbb{R}$  en fonction uniquement des conditions initiales.

**Théorème 4 (Formule de d'Alembert).** *La solution de l'équation des ondes (3.1) ou  $u_0$  est une fonction différentiable est :*

$$(3.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy$$

*Démonstration.* On a déjà vu que toute solution est de la forme :

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

les conditions initiales impliquent alors que :

$$u(x, 0) = u_0(x) = F(x) + G(x)$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) = c(F'(x) - G'(x))$$

en dérivant on obtient le système :

$$\begin{cases} F'(x) + G'(x) = u_0'(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{u_1(x)}{c} \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{cu_0'(x) + u_1(x)}{2c} \\ G'(x) = \frac{cu_0'(x) - u_1(x)}{2c} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1 + \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy \\ G(x) &= c_2 + \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy \end{aligned}$$

La condition initiale nous aide à déterminer les constantes d'intégration :

$$u_0(0) = u(0, 0) = F(0) + G(0) = c_1 + c_2 + u_0(0)$$

ce qui entraîne :

$$c_1 + c_2 = 0$$

et en sommant  $F(x + ct)$  et  $G(x - ct)$  on obtient le résultat.  $\square$

## 3.2 Conditions aux limites – Le cas de la demi-droite

On va étendre la formule de d'Alembert à l'équation des ondes dans une demi-droite avec une condition de frontière de Neumann homogène. On considère le problème :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall t > 0 \quad \forall x > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 & \forall t > 0. \end{cases}$$

où  $c > 0$  est la vitesse.

Physiquement la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante.

Si on suit le même raisonnement que dans la démonstration du théorème précédent on a (en gardant les mêmes notations) :

$$\begin{aligned} F(x) &= c_1 + \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy \\ G(x) &= c_2 + \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(y) dy \end{aligned}$$

La condition initiale implique, encore une fois, que :

$$c_1 + c_2 = 0,$$

dans le cas  $x - ct \geq 0$  on a alors :

$$(3.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy$$

Pour  $x = 0$  la condition de frontière implique :

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F'(ct) + G'(-ct) \quad \forall t > 0$$

ceci est équivalent à :

$$G'(y) = -F'(-y) \quad \forall y < 0$$

et, intégrant des deux cotés :

$$G(y) = c_3 + F(-y)$$

maintenant, pour  $y = 0$  on peut appliquer la condition initiale :

$$G(0) = c_3 + F(0) = c_3 + c_1 + \frac{1}{2}u_0(0)$$

et, d'un autre côté :

$$G(0) = c_2 + \frac{1}{2}u_0(0)$$

ce qui entraîne :

$$c_3 + c_1 = c_2$$

en prenant en compte le fait que  $c_1 + c_2 = 0$  on conclut :

$$c_3 = 2c_2 = -2c_1$$

et la solution pour  $x - ct \leq 0$  est alors donnée par :

(3.9)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= F(x + ct) - F(ct - x) + c_3 \\ &= \frac{1}{2}(u_0(ct - x) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} u_1(y) dy. \end{aligned}$$

On vient d'obtenir une expression pour la solution dans le cas de la demi-droite avec condition de frontière de Neumann homogène. Il s'agit d'une généralisation de la formule de d'Alembert. On peut procéder de la même façon pour un domaine spatial borné, mais les calculs sont beaucoup plus lourds. Cette expression de la solution a l'avantage de mettre bien en évidence le comportement des ondes réfléchies par la frontière.

### 3.3 Solutions à variables séparées

On cherche maintenant les solutions de l'équation des ondes à variables séparées. On suppose qu'il existe des fonctions (inconnues)  $F$  et  $G$ , d'une variable réelle telles que

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

On calcule les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= FG'' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= F''G \end{aligned}$$

on a alors

$$FG'' = c^2 F''G$$

comme, par hypothèse  $FG \neq 0$  on peut écrire

$$c^2 \frac{F''}{F}(x) = \frac{G''}{G}(t)$$

la fonction de gauche dépend uniquement de  $x$  et celle de droite uniquement de  $t$ , on peut alors dire qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} c^2 \frac{F''}{F}(x) = \lambda \\ \frac{G''}{G}(t) = \lambda \end{cases}$$

si  $\lambda = 0$  on a  $F'' = G'' = 0$  et donc

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b \\ G(t) &= \alpha t + \beta \end{aligned}$$

si  $\lambda > 0$  on a des solutions exponentielles réelles

$$\begin{aligned} F(x) &= ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} \\ G(t) &= \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}t} \end{aligned}$$

si  $\lambda < 0$  on a des solutions oscillantes

$$\begin{aligned} F(x) &= a \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + b \sin\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) \\ G(t) &= \alpha \cos\left(\sqrt{-\lambda}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \end{aligned}$$

en prenant en compte les conditions initiales et les conditions aux limites on peut déterminer les solutions.

# Chapitre 4

## Introduction à la série de Fourier

### 4.1 Rappels sur les séries

Une série peut être vue la généralisation de la somme à un nombre infini de termes. La manipulation des séries est plus complexe que celle des sommes finies en raison de la nécessité d'étudier la convergence, en effet, contrairement aux sommes finies la somme d'une série peut être infinie ou même indéterminée. On va présenter rapidement les principaux résultats sur les séries pour qu'on puisse aborder rapidement la série de Fourier.

**Définition 10.** On appelle série de terme général  $u_n$  la suite des sommes partielles  $S_n$ , où :

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i.$$

On dit que la série est convergente si et seulement si  $S_n$  est convergente. On dit qu'une série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série de terme général  $|u_n|$  est convergente.

**Exemple 10.** 1. La série  $\sum_{i=1}^{\infty} i$  est divergente car :

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

**Proposition 8.** Une condition nécessaire pour qu'une série soit convergente est que son terme général tende vers 0. ATTENTION : Cette condition n'est pas suffisante.

**Exemple 11.** Montrons que la série harmonique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

est divergente. On peut minorer les sommes partielles par une intégrale :

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(voir figure 4.1), mais :

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log n \rightarrow \infty$$

ce qui entraîne que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

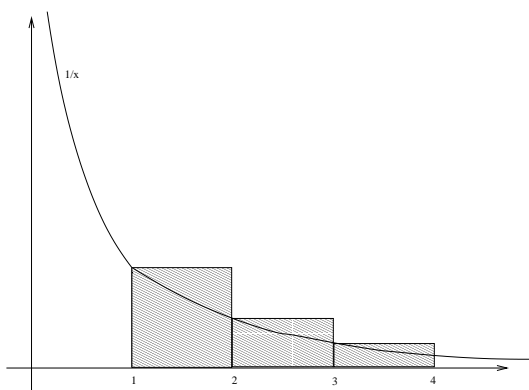


FIG. 4.1 – La série harmonique et  $\int dx/x$

La convergence d'une série est, en général, assez difficile à démontrer. On a néanmoins à notre disposition un certain nombre de critères de convergence, il faut se souvenir que aucun d'eux n'apporte une réponse dans tous les cas.

**Proposition 9 (Règle de d'Alembert).** Soit  $\sum u_n$  une série, alors :

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  alors ne peut rien dire sur la convergence de  $\sum u_n$

**Proposition 10 (Règle de Cauchy).** Soit  $\sum u_n$  une série, alors :

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$  alors  $\sum u_n$  converge

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$  alors ne peut rien dire sur la convergence de  $\sum u_n$

## 4.2 Rappels sur les séries de fonctions

On peut s'interroger sur le sens à donner à une expression du type :

$$(4.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

où chaque  $f_n(x)$  est une fonction réelle. Si pour toutes les valeurs  $x \in D \subset \mathbb{R}$  la série converge alors l'expression (4.1) définit une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . Si la fonction  $f$  vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in D$$

alors on dit que la série de fonctions (4.1) *converge ponctuellement* vers la fonction  $f(x)$ .

Il est très important de noter que la somme d'une série de fonctions continues n'est pas forcément continue. Il est de même pour la différentiabilité, la somme d'une série de fonctions dont tous les termes sont dérivables peut ne pas être dérivable.

Les exemples les plus simples de séries de fonctions sont les séries de puissances où on représente une fonction comme une série de polynômes  $c_n(x - a)^n$  au voisinage d'un point  $a$ . Une exemple est la fonction exponentielle :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

## 4.3 Développement en polynômes trigonométriques

On va maintenant étudier le développement d'une fonction périodique comme une superposition de fonctions trigonométriques.

**Définition 11.** Une fonction d'une variable réelle (ou complexe)  $f$  est périodique de période  $L$  si elle vérifie :

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (ou } x \in \mathbb{C})$$

Notons que si une fonction est périodique la périodicité n'est pas unique, en effet, si  $f$  est périodique de période  $L$ , elle est aussi périodique de période  $jL$  où  $j$  est un entier positif.

Dans certains cas on peut définir la période fondamentale comme le plus petit réel non nul  $L$  tel que  $f(x + L) = f(x) \quad \forall x$ . Les constantes étant périodiques pour toute période n'ont pas de période fondamentale.

**Exemple 12.** Les fonctions  $\sin x$  et  $\cos x$  sont périodiques de période  $2\pi$ . Les fonctions  $\sin(2\pi x/L)$  et  $\cos(2\pi x/L)$  sont périodiques de période  $L$ , un petit calcul nous permet de le vérifier pour le sinus :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+L)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

La fonction de variable complexe  $\exp(w)$  est périodique de période  $2\pi i$ .

En général si  $f$  est périodique de période  $L_1$  alors la fonction  $g(x) = f(L_1 x/L_2)$  est périodique de période  $L_2$  :

$$g(x+L_2) = f(L_1(x+L_2)/L_2) = f(L_1 x/L_2 + L_1) = f(L_1 x/L_2) = g(x)$$

**Théorème 5.** Soit  $f$  une fonction réelle de variable réelle périodique de période  $L$  dérivable, sauf pour un nombre fini de points en  $[0, L]$ , la série de Fourier de  $f$

$$(4.2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où les coefficients sont données par

$$(4.3) \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) dx$$

$$(4.4) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) dx$$

converge vers

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \right)$$

**Théorème 6.** Soit  $f$  une fonction complexe de variable réelle périodique de période  $L$  dérivable, sauf pour un nombre fini de points, alors on a :

$$(4.5) \quad \frac{1}{2} \left( \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{(in\frac{2\pi}{L}x)}$$

les coefficients sont données par :

$$(4.6) \quad c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-in\frac{2\pi}{L}x} dx$$

Ce développement est unique.

Une fonction  $L$ -périodique est déterminée par ses valeurs dans une intervalle de longueur  $L$ .

**Exemple 13.** Calculons le développement en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi[ \\ 1 & x \in [\pi, 2\pi[ \end{cases}$$

on a alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dx = 1$$

et

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(nx) dx = 0$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(nx))' dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

et donc

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) \sin(nx)$$

Dans la figure 4.2 on trace la fonction  $f(x)$  et sa série de Fourier tronquée à l'ordre 4, 10 et 100.

**Exemple 14.** On considère maintenant une fonction périodique de période 2 définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1[ \\ 2 - x & x \in [1, 2[ \end{cases}$$

on a alors

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

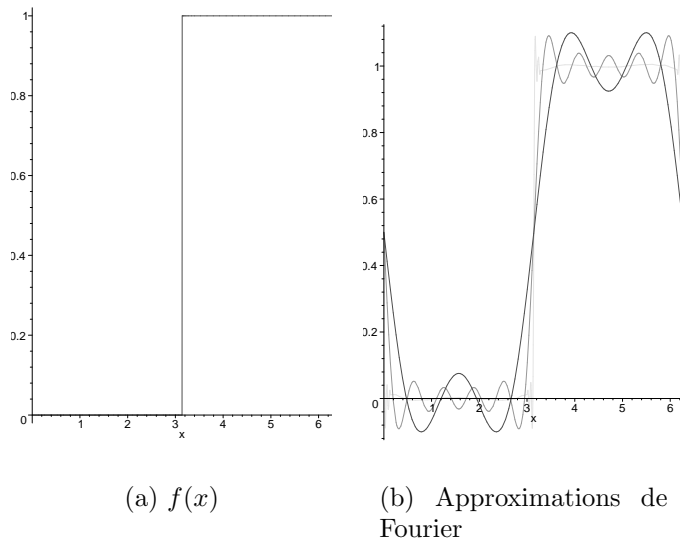


FIG. 4.2 – La fonction et les premiers éléments de la somme partielle de la série de Fourier

et

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^2 f(x) \cos(n\pi x) dx \\
 &= \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (2-x) \cos(n\pi x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 + (-1)^n)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 f(x) \sin(n\pi x) dx \\
 &= \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx + \int_1^2 (2-x) \sin(n\pi x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et on conclut que

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \cos(n\pi x)$$

Dans la figure 4.3 on trace la fonction  $f(x)$  et sa série de Fourier tronquée à l'ordre 4, 10 et 100.

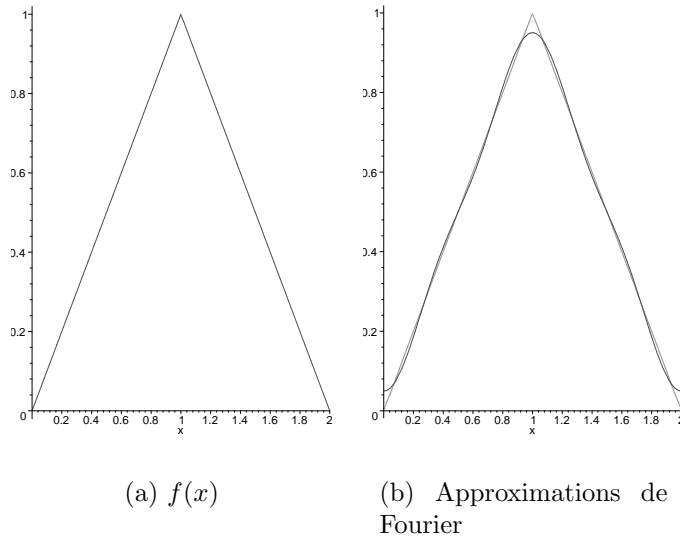


FIG. 4.3 – La fonction et les premiers éléments de la somme partielle de la série de Fourier

**Proposition 11.** *Si les fonctions définies par deux séries de Fourier sont égales pour tout  $x$  alors tous les termes sont égaux, c'est-à-dire, si*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

et :

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

et  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  alors  $a_n = \alpha_n$  et  $b_n = \beta_n$  pour tout  $n > 0$ .

## 4.4 Série de Fourier des fonctions à carré intégrable

La série de Fourier peut se généraliser aux fonctions à carré intégrable. Soit  $f$  une fonction  $L$ -périodique qui vérifie

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx < \infty$$

alors  $f$  admet un développement en série de Fourier. Dans certains cas (qu'on n'abordera pas ici) l'expression de la série de Fourier n'a pas de sens mais on peut

lui donner un sens comme limite de séries de fonctions pour lesquelles l'expression de la série a un sens.

On se contentera de remarquer que l'espace des fonctions de carré intégrable qu'on nomme  $L^2(0, L)$  est un espace vectoriel qu'on peut munir d'un produit scalaire de fonctions<sup>1</sup>. Si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $L^2(0, 1)$  alors le produit scalaire de  $f$  et  $g$  est défini par

$$(4.7) \quad (f|g) = \int f(x)g(x) dx.$$

Le fait qu'on puisse calculer cette intégrale est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

**Proposition 12.** *Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $L^2$  de  $]0, L[$  alors*

$$\int_0^L |f(x)||g(x)| dx \leq c \left( \int_0^L |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sur cet espace vectoriel les fonctions  $e^{in\frac{2\pi}{L}x}$  forment une base orthogonale. Les coefficients de Fourier sont les coordonnées dans cette base, et on retrouve leur expression comme les projections sur les éléments de la base.

**Théorème 7 (Parseval).** *Si  $f$  est une fonction de  $L^2(0, L)$  de série de Fourier*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

alors

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

## 4.5 Application à l'équation des ondes

On s'intéresse aux solutions périodiques de l'équation des ondes.

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, t) = u(x + L, t) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>on peut remarquer qu'on considère comme une même fonction toutes les fonctions dont l'intégral du carré de leur différence est nul comme une même fonction pour plus de précisions voir [5]

$c$  est la vitesse,  $L$  la périodicité qui est une donnée. Les conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  sont supposées périodiques et admettent un développement en série de Fourier

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0,n} \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{0,n} \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{1,n} \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Supposons que la solution de (4.8) admet un développement en série de Fourier en  $x$

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

supposons aussi que on peut dériver cette série terme à terme, on a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \left(n\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left(n\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

la proposition 11 et l'équation entraîne que les coefficients de Fourier de la solution vérifient

$$(4.9) \quad \begin{cases} a_0''(t) = 0 \\ a_0(0) = a_{0,0} \\ a_0'(0) = a_{1,0} \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \begin{cases} a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0 \\ a_n(0) = a_{0,n} \\ a_n'(0) = a_{1,n} \end{cases}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0 \\ b_n(0) = b_{0,n} \\ b_n'(0) = b_{1,n} \end{cases}$$

où

$$\lambda_n = cn\frac{2\pi}{L}.$$

Les coefficients de Fourier sont alors donnés par

$$\begin{aligned} a_0(t) &= a_{1,0}t + a_{0,0} \\ a_n(t) &= a_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \\ b_n(t) &= b_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \end{aligned}$$

et donc

$$(4.12) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(a_{0,0} + a_{1,0}t) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \right) \cos\left(n \frac{2\pi}{L} x\right) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left( b_{0,n} \cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \right) \sin\left(n \frac{2\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

**Exemple 15.** *Calculons les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec*

$$u_0(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1[ \\ 2 - x & x \in [1, 2[ \end{cases}$$

et  $u_1(x) = 0$ . Par application directe de la formule précédente on a

$$(4.13) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x)$$

# Chapitre 5

## Équations de Maxwell

Dans ce chapitre on cherche des solutions particulières des équations de Maxwell. Ces équations décrivent la propagation d'une onde électromagnétique qui se propage dans un milieu de perméabilité électrique  $\varepsilon$  et de permittivité magnétique  $\mu$ . Les inconnues de ces équations sont les trois coordonnées du champ électrique qu'on note  $\vec{E}$  et les trois coordonnées du champ magnétique qu'on note  $\vec{H}$ . Si on note  $c$  la vitesse de la lumière, et en absence de sources de courant et de charge les équations de Maxwell s'écrivent

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} & \text{Loi de Faraday} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} & \text{Loi d'Ampère} \\ \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

où  $\text{rot}$  désigne le rotationnel d'un champ vectoriel qui est défini par

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \wedge \vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

pour  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ .

### 5.1 Recherche d'ondes planes

On cherche les solutions de (5.1) ondes planes, c'est-à-dire, les solutions où  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont parallèles à un plan. Pour simplifier les calculs on prend le plan

perpendiculaire à l'axe des  $x$ , on aura alors

$$E_x = 0 = H_x$$

et

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

d'un autre coté la première équation de Maxwell implique que

$$0 = \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Si, en plus, on restreint notre choix aux solutions telles que  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  et  $H_z$  dépendent uniquement de  $x$  et  $t$  (et non plus de  $y$  et  $z$ ) on obtient alors les deux systèmes découplés

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$$

et

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{cases}.$$

Il s'agit de systèmes de transport où les équations sont couplées. Par combinaison linéaire des deux équations de (5.2) on obtient

$$(5.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\mu}H_y + \sqrt{\varepsilon}E_z) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\mu}H_y + \sqrt{\varepsilon}E_z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\mu}H_y - \sqrt{\varepsilon}E_z) + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\mu}H_y - \sqrt{\varepsilon}E_z) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de transport, on sait que les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} \sqrt{\mu}H_y + \sqrt{\varepsilon}E_z = g\left(x + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) \\ \sqrt{\mu}H_y - \sqrt{\varepsilon}E_z = f\left(x - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) \end{cases}$$

où les fonctions  $f$  et  $g$  sont à déterminer à partir des conditions initiales et, éventuellement de conditions aux limites. ce qui entraîne

$$(5.5) \quad \begin{cases} H_y = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left( f\left(x - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) + g\left(x + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) \right) \\ E_z = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( g\left(x + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) - f\left(x - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}t\right) \right) \end{cases}$$

Les mêmes calculs pour le système (5.3) donnent

$$(5.6) \quad \begin{cases} H_z = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left( \phi \left( x - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t \right) + \psi \left( x + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t \right) \right) \\ E_y = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left( \psi \left( x + \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t \right) - \phi \left( x - \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} t \right) \right) \end{cases}$$

On choisit maintenant les ondes qui se déplacent dans un unique sens (vers la gauche), en général dans un problème de propagation d'ondes on prend des ondes rentrantes (la source est située à l'extérieur du domaine de calcul) ou bien sortantes (la source est à l'intérieur du domaine). Ce choix correspond à prendre  $g \equiv \psi \equiv 0$  et on a

$$\vec{H} = H_y \vec{e}_y + H_z \vec{e}_z \text{ et } \vec{H} \perp \vec{E} \text{ et } \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

## 5.2 Réduction à l'équation des ondes

Si on suppose que le champ magnétique et le champ électrique sont suffisamment réguliers et si l'opérateur de dérivation en temps et en espace commutent alors en appliquant le rotationnel aux deux premières équations de Maxwell on obtient

$$\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$$

et :

$$\frac{\varepsilon}{c} \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}$$

la propriété du rotationnel

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$$

entraîne

$$(5.7) \quad \frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$$

on a obtenu une équation d'ondes a coefficient  $\frac{\mu\varepsilon}{c^2}$

Par un raisonnement similaire on obtient pour le champ magnétique

$$(5.8) \quad \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \Delta \vec{H}$$

et on peut appliquer tous les résultats pour l'équation des ondes.

# Chapitre 6

## Équations de Laplace et Poisson

On s'intéresse aux équations

$$\Delta u = 0 \quad \text{Équation de Laplace}$$

et

$$\Delta u = \rho \quad \text{Équation de Poisson}$$

Ces équations apparaissent dans l'électrostatique, dans la mécanique du point, dans la thermodynamique et dans bien d'autres domaines.

Une fonction définie dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  solution de l'équation de Laplace est appelée *harmonique*.

**Exemple 16.** Si  $\vec{A} = (a_1, \dots, a_n)$  est un point de  $\mathbb{R}^n$  alors pour tout point  $\vec{R} = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  on peut définir la distance  $r$  de  $\vec{R}$  à  $\vec{A}$  par

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$$

$r = r(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction réelle définie dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $r^2$  est un polynôme de degré 2 en  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $f(x_1, \dots, x_n) = g(r) = r^2$  son Laplacien est

$$\Delta f = 2n$$

car

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(r^2) &= 2(x_j - a_j) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(r^2) &= 2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(r^2) &= \delta_i^j \end{aligned}$$

$f$  est donc solution d'une équation de Poisson.

Le Laplacien est un opérateur différentiel qui a des propriétés d'invariance par rapport aux rotations. Soit  $f(x_1, x_2) = g(r(x_1, x_2), \theta(x_1, x_2))$  une fonction suffisamment régulière, calculons son Laplacien en coordonnées polaires :

$$(6.1) \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

et on peut vérifier que si la fonction  $g$  ne dépend pas de  $\theta$  il en est de même pour son Laplacien. Le résultat précédent appliqué à la fonction  $f(\vec{x}) = r^2$  :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = 4.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  si on considère les coordonnées sphériques

$$(6.2) \quad \begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

alors si  $f(x_1, x_2, x_3) = g(r(x_1, x_2, x_3), \theta(x_1, x_2, x_3), \phi(x_1, x_2, x_3))$  on a :

$$(6.3) \quad \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

On voit que si la fonction est invariante par rotation alors son Laplacien ne dépend que de  $r$ . On peut aussi vérifier un résultat précédent pour  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 2r) = 6.$$

On peut utiliser la distance à un point pour énoncer un résultat très intéressant

**Théorème 8.** Une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}^n$   $g(\vec{x})$  qui ne dépend que de  $r = |x - c|$  s'écrit  $g(x_1, \dots, x_n) = f(r)$  où :

$$\begin{aligned} f(r) &= a \ln r + b & \text{si } n = 2 \\ f(r) &= ar^{2-n} + b & \text{si } n > 2 \end{aligned}$$

où  $f(r) = g(\vec{x})$  et  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} r^2 \\ &= \frac{1}{2r} 2(x_i - a_i) = \frac{x_i - a_i}{r} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i - a_i}{r} = \frac{r - (x_i - a_i) \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{(x_i - a_i)^2}{r^3}\end{aligned}$$

on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial r}{\partial x_i} f'(r)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(\vec{x}) = f''(r) \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + f'(r) \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2},$$

le Laplacien peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}\Delta g &= \sum_{i=1}^n \left( f''(r) \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2} + f'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{(x_i - a_i)^2}{r^3} \right) \right) \\ &= f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} f'(r))'\end{aligned}$$

Si  $\Delta g = 0$  alors la fonction

$$r^{n-1} f'(r) = a$$

où  $a$  est une constante, ce qui entraîne

$$f(r) = \begin{cases} a \ln r + b & \text{si } n - 1 = 1 \\ \frac{a}{(2-n)r^{n-2}} + b & \text{si } n - 1 \neq 1 \end{cases}$$

□

De ce théorème on peut conclure que le potentiel d'une charge placée au point  $A$  est proportionnelle à  $1/r$  en dimension 3 et à  $\ln r$  en dimension 2.

Voyons un exemple, la fonction

$$h(x_1, \dots, x_n) = g(r) = \frac{1}{r}$$

définie dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{A\}$  ( $r \neq 0$ ) est dérivable dans son domaine. Calculons son Laplacien

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{-\frac{1}{2}2(x_i - a_i)}{\left( \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} &= -\frac{1}{\left( \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x_i - a_i) \left( -\frac{3}{2} \right) 2(x_i - a_i)}{\left( \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x_i - a_i)^2}{r^5}\end{aligned}$$

donc :

$$\Delta h = -\frac{n}{r^3} + 3\frac{r^2}{r^5} = \frac{3-n}{r^3}.$$

Pour  $n = 3$  la fonction  $h$  est harmonique.

## 6.1 Solutions à variables séparées

Cherchons des solutions de l'équation de Laplace

$$(6.4) \quad \Delta f(x, y) = 0 \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

à variables séparées : on suppose qu'il existent deux fonctions  $F(x)$  et  $G(y)$  telles que

$$f(x, y) = F(x)G(y).$$

L'équation est équivalente à :

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}$$

on doit donc rechercher au même temps la constante  $\lambda$  et les fonctions  $F$  et  $G$  (on dit qu'il s'agit d'un problème aux valeurs propres).

On a trois cas possibles :

Si  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b \\ G(y) &= \alpha y + \beta \end{aligned}$$

Si  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ G(y) &= \alpha \cos(\sqrt{-\lambda}y) + \beta \sin(-\sqrt{-\lambda}y) \end{aligned}$$

Si  $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(-\sqrt{-\lambda}x) \\ G(y) &= \alpha e^{\sqrt{\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}y} \end{aligned}$$

où les quatre constantes à déterminer le sont éventuellement par les conditions aux limites.

## 6.2 Solutions périodiques

On s'intéresse aux solutions du problème

$$(6.5) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x + 2\pi, y) = u(x, y) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \\ u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution étant périodique en  $x$  on peut la développer en série de Fourier en  $x$

$$u(x, y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin(nx)$$

en supposant qu'on peut dériver sous le signe somme on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(y) \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(y) \sin(nx) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{a_0''(y)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(y) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(y) \sin(nx) \end{aligned}$$

Comme  $u(x, y)$  est solution de l'équation de Laplace, les coefficients de Fourier satisfont les équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} a_0''(y) = 0 \\ a_0(0) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} a_0(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_n''(y) - n^2 a_n(y) = 0 \\ a_n(0) = \tilde{a}_n \\ \lim_{y \rightarrow \infty} a_n(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_n''(y) - n^2 b_n(y) = 0 \\ b_n(0) = \tilde{b}_n \\ \lim_{y \rightarrow \infty} b_n(y) = 0 \end{cases}$$

la solution générale de l'équation différentielle en  $a_0$  est

$$a_0(y) = c_1 + c_2 y$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes d'intégration. Comme  $\lim_{y \rightarrow \infty} a_0(y) = 0$  alors  $c_2 = 0$  et  $c_1 = 0$ , en conclusion

$$a_0(y) = 0$$

Pour les coefficients  $a_n(y)$  on a

$$a_n(y) = c_{n,1} e^{ny} + c_{n,2} e^{-ny}$$

Le comportement à l'infini de  $a_n(y)$  et de  $b_n(y)$  implique que  $c_{n,1} = 0$  et donc  $c_{n,2} = \tilde{a}_n$ , en conclusion

$$\begin{aligned} a_n(y) &= \tilde{a}_n e^{-ny} \\ b_n(y) &= \tilde{b}_n e^{-ny} \end{aligned}$$

La solution de (6.5) est alors

$$(6.6) \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n e^{-ny} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n e^{-ny} \sin(nx)$$

# Chapitre 7

## Équation de la chaleur

On considère une barre mince de longueur infinie (représentée par l'axe réel), et on cherche l'évolution au cours du temps de la température  $u$  dans cette barre. La fonction  $u(x, t)$  donne la température au point  $x$  à l'instant  $t$ . Si la barre a une conductivité thermique homogène et en absence de sources de chaleur,  $u$  vérifie

$$(7.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

Si la température à l'instant  $t = 0$  est connue et donnée par la fonction  $u_0(x)$ , alors on ajoute une condition initiale

$$(7.2) \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Le problème (7.1), (7.2) est beaucoup plus difficile que l'équation de transport, en général, *on n'a pas de solution explicite*. On peut néanmoins trouver une *solution élémentaire*.

**Théorème 9.** *Le problème*

$$(7.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t) & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ E(x, 0) = 0 \end{cases}$$

où  $\delta$  représente une mesure de Dirac, admet une solution unique

$$(7.4) \quad E(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

La démonstration de ce résultat, qui utilise la transformation de Fourier, ne sera pas faite ici.

Dans certains cas on peut se servir de la solution élémentaire pour trouver la solution du problème original, en effet, si  $u_0$  est une fonction de carré intégrable,

ou bien une fonction bornée, alors la solution de (1.4) avec la condition initiale (7.2) est

$$(7.5) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} E(y, t) u_0(x - y) dy = (u_0 \star E)(x)$$

de plus on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty} &\leq \|u_0\|_{\infty} \\ \|u\|_{L^2} &\leq \|u_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

On peut énoncer un résultat analogue dans le cas sans second membre et condition initiale non nulle.

## 7.1 Propriétés des solutions de l'équation de la chaleur

On montre un premier résultat qui nous donne des informations très importantes sur les solutions et qui est très utile dans les démonstrations d'unicité.

**Théorème 10 (Principe du maximum).** *Si les conditions de validité de la représentation (7.5) sont vérifiées et si la condition initiale vérifie  $u_0(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  alors la solution de l'équation (7.1) vérifie*

$$0 \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \quad \forall t > 0$$

*Démonstration.*  $u \geq 0$  car  $u$  est une intégrale d'un produit de fonctions positives. Il est bien connu que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

par le changement de variable  $y = x/\sqrt{4t}$  on montre que

$$\int_{\mathbb{R}} E(x, t) dx = 1$$

et on peut faire la majoration suivante

$$u(x, t) \leq \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \right) \int_{\mathbb{R}} E(x, t) dx = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0(x)$$

□

**Exemple 17.** *Prenons une condition initiale gaussienne*

$$u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

la solution est alors

$$u(x, t) = u_0 \star E(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

on fait le changement de variable

$$z = y\sqrt{1+t} - \frac{x}{\sqrt{1+t}}$$

et on note que

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4t} &= \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{4t} - \frac{2xy}{4t} + \frac{x^2}{4t} \\ &= \frac{1+t}{4t} y^2 - \frac{2}{4t} \sqrt{1+t} y \frac{x}{\sqrt{1+t}} + \frac{x^2}{4t(1+t)} - \frac{x^2}{4t(1+t)} + \frac{x^2}{4t} \\ &= \frac{1}{4t} \left( \sqrt{1+t} y - \frac{x}{\sqrt{1+t}} \right)^2 - \frac{x^2}{4t(1+t)} + \frac{x^2}{4t} \\ &= \frac{1}{4t} \left( \sqrt{1+t} y - \frac{x}{\sqrt{1+t}} \right)^2 + \frac{x^2 t}{4t(1+t)} \\ &= \frac{z^2}{4t} + \frac{x^2}{4(1+t)} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \frac{dz}{\sqrt{1+t}} \right) e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t}} \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz \right) e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{x^2}{4(1+t)}} \end{aligned}$$

la solution est aussi une gaussienne, elle est obtenue un décalage en temps de la donnée initiale.

**Exemple 18.** Si on prend la fonction de Heaviside comme donnée initiale :

$$u_0(x) = H(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

une application du résultat précédent donne la solution de l'équation de la chaleur suivante

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x-y) E(y, t) dy \\ &= \int_{x-x_0}^{\infty} E(y, t) dy \\ &= \int_{x-x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

la dernière intégrale n'est pas calculable, par changement de variable on peut la ramener à une intégrale de  $e^{-x^2}$  dont la primitive ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

## 7.2 Solutions auto-semblables

Dans cette section on cherche les solutions auto-semblables de l'équation de la chaleur en dimension 1 d'espace. On cherche la solution de (7.1) sous la forme

$$u(x, t) = t^\alpha g(t^\beta x)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles qu'on pourra, éventuellement, déterminer pendant le calcul et  $g$  est une fonction d'une variable,  $g$  sera solution d'une équation différentielle ordinaire. Calculons les dérivées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \alpha t^{\alpha-1} g(t^\beta x) + \beta t^{\alpha+\beta-1} x g'(t^\beta x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= t^{\alpha+2\beta} g''(t^\beta x).\end{aligned}$$

Comme  $u$  est solution de l'équation de la chaleur l'équation différentielle ordinaire pour  $g$  est :

$$\alpha g + \beta t^\beta x g' = t^{2\beta+1} g''$$

en notant  $y = t^\beta x$  on obtient.

$$\alpha g(y) + \beta y g'(y) = t^{2\beta+1} g''(y),$$

Pour éliminer  $t$  on impose de plus

$$\beta = -\frac{1}{2}$$

et on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$(7.6) \quad \alpha g(y) - \frac{1}{2} y g'(y) = g''(y).$$

Cette équation n'est pas facile à résoudre.

**Exemple 19.** Cherchons les solutions auto-semblables de l'équation de la chaleur avec  $\alpha = \beta = -1/2$ . On cherche donc à résoudre

$$(7.7) \quad g(y) + y g'(y) + 2g''(y) = 0$$

on cherche à déterminer  $c$  pour que  $g_0$  soit une solution particulière de la forme

$$g_0(y) = e^{-cy^2}.$$

Par dérivation on obtient

$$\begin{aligned}g_0'(y) &= -2cy e^{-cy^2} \\g_0''(y) &= (-2c + 4c^2 y^2) e^{-cy^2}\end{aligned}$$

mais  $g$  solution de l'équation implique que

$$(1 - 2cy^2 - 4c + 8c^2 y^2) e^{-c^2 y^2} = 0$$

l'exponentielle étant positive il faut que  $c = 1/4$  et on a

$$g_0(y) = e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

On cherche maintenant une solution générale de l'équation (7.7) de la forme suivante

$$g(y) = g_0(y)h(y).$$

Calculons les dérivées

$$\begin{aligned}g'(y) &= g_0'(y)h(y) + g_0(y)h'(y) \\g''(y) &= g_0''(y)h(y) + 2g_0'(y)h'(y) + g_0(y)h''(y)\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}0 &= g_0 h + y g_0' h + y g_0 h' + 2g'' h + 4g_0' h' + 2g_0 h'' \\0 &= (g_0 + y g_0' + 2g_0'') h + y g_0 h' + 4g_0' h' + 2g_0 h'' \\0 &= y g_0 h' + 4g_0' h' + 2g_0 h'' \\0 &= (y g_0 + 4g_0') h' + 2g_0 h'' \\0 &= e^{-\frac{y^2}{4}} (y - 2y) h'(y) + 2e^{-\frac{y^2}{4}} h''(y) \\0 &= -y h'(y) + 2h''(y)\end{aligned}$$

on a ainsi obtenu une équation différentielle ordinaire du premier ordre en  $h' = w$ , on peut séparer les variables

$$\frac{w'}{w} = \frac{y}{2}$$

la solution est

$$w(y) = h'(y) = \lambda e^{\frac{y^2}{4}}.$$

La fonction  $h$  est donc

$$h(y) = \lambda \int_0^y e^{\frac{z^2}{4}} dz + \mu.$$

On reconstitue la solution générale de (7.7)

$$g(y) = g_0(y)h(y) = \lambda e^{-\frac{y^2}{4}} \int_0^y e^{\frac{z^2}{4}} dz + \mu e^{-\frac{y^2}{4}}$$

La solution auto-semblable est alors :

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} g(t^{-\frac{1}{2}} x) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{z^2 + x^2}{4}} dz + \mu e^{\frac{x^2}{4t}}$$

# Chapitre 8

## Classification des Équations aux Dérivées Partielles

Dans ce dernier chapitre on donner une classification des Équations aux Dérivées Partielles linéaires du second ordre. À chaque type d'équation correspond un comportement différent des solutions.

**Définition 12.** Une Équation aux Dérivées Partielles linéaire d'ordre 2 définie dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est de la forme

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = F(\vec{x}, u, \nabla u)$$

où  $a_{ij}$  et  $F$  sont des fonctions données.

**Exemple 20.**  $n$  dimension 1 l'équation des ondes est de ce type avec  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = -c^2$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$  et  $F \equiv 0$ .

**Exemple 21.** Pour l'équation de transport on a

$$F(\vec{x}, u, \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$$

et  $a \equiv 0$ .

**Exemple 22.** Pour l'équation de la chaleur on a  $a_{11} = 1$ ,  $a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$  et  $F = \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Considérons le cas d'une Équation aux Dérivées Partielles en deux variables  $x$  et  $t$  :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(\vec{x}, u, \nabla u)$$

dans le cas  $F \equiv 0$  on peut essayer de trouver des caractéristiques, le long desquelles la solution sera solution d'une équation différentielle ordinaire, on remarque que :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est équivalent à :

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} \left( A \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2B \frac{\partial x}{\partial t} + C \right) = 0$$

on définit alors le discriminant

$$\Delta = B^2 - AC$$

et on a la classification suivante

$\Delta > 0$  l'équation a 2 caractéristiques et est *hyperbolique*.

$\Delta < 0$  l'équation n'a pas de caractéristique et est *elliptique*.

$\Delta = 0$  l'équation a une caractéristique et est *parabolique*.

**Exemple 23.** L'équation des ondes en  $\mathbb{R}$  a  $\Delta = c^2 > 0$  elle est donc *hyperbolique*.

**Exemple 24.** L'équation de la chaleur en  $\mathbb{R}$  a  $\Delta = 0$  elle est donc *parabolique*.

**Exemple 25.** L'équation de Laplace en  $\mathbb{R}^2$  a  $\Delta = -1 < 0$  elle est donc *elliptique*.

# Bibliographie

- [1] C. CUVELIER, J. DESCLAUX, J. RAPPAZ, G. STUART, and B. ZWAHLEN. *Éléments d'équations aux dérivées partielles pour ingénieurs : théorie et méthodes numériques*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1988.
- [2] K. ERIKSSON, D. ESTEP, P. HANSBO, and C. JOHNSON. *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, New York, 1990.
- [3] Charles PUSTERLE. *Analyse vectorielle des champs : méthodes pour la physique*. Masson, Paris, 1991.
- [4] Hervé REINHARD. *Équations aux dérivées partielles : introduction*. Dunod, Paris, 1991.
- [5] Laurent SCHWARTZ. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, Paris, 1983.