

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche,



***Ecole Nationale Supérieure
d'Informatique pour l'Industrie
et l'Entreprise***

Mr Malik MALLEM

Modélisations géométrique et cinématique de Robots

**Février
2011**

ENSIE 2

**Option Robotique et
Réalité Virtuelle**

ENSIIE2

Option : Robotique & Réalité Virtuelle

Cours : Robotique (IRO)

« MODELISATIONS GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE DE ROBOTS »

Avertissement : Certains transparents de ce document proviennent du cours de Florent Chavand, qu'il en soit remercié.

Malik MALLEM

Désignation du cours : MODELISATIONS GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE DE ROBOTS

Objectif : Ce cours est une introduction à la robotique. La modélisation géométrique et cinématique de robots et de certaines tâches y sont présentées. Les outils présentés peuvent être utilisés pour la réalisation du projet de CAO-robotique.

Organisation pédagogique : 12h de cours et de T.D.

Plan du cours :

1. Introduction.....	4
2. Les disciplines de la Robotique	5
3. Constituants d'un robot	6
4. Fonctions d'un robot.....	7
5. Modélisation de robot manipulateur	8
5.1 Hypothèses.....	8
5.2 Définitions.....	9
5.3 Modèle géométrique direct (MGD)	10
5.4 Modèle géométrique inverse (MGI).....	10
5.5 Modèle différentiel direct (MDD).....	10
5.6 Modèle différentiel inverse (MDI).....	12
6. Structures de base de robot manipulateur	13
6.1 Principaux porteurs	13
6.2 Redondance de robot.....	15
7. Modèles de la structure de base du robot.....	17
7.1. Localisation et orientation d'un objet dans l'espace	17
7.2 Structure de base PRP	18
7.3 Structure de base RRR	19
7.4 Principaux types d'équations [Khalil&Dombre1999]	20
8. Exemples de modélisation de robot manipulateur	21
8.1 Paramètres de Denavit - Hartenberg	25
8.2 Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)	26
8.3 Robot SCEMI (6R)	27
8.4 MGD du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR).....	28
8.5 MDD du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR).....	29
8.6 MGI du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)	31
8.7 MDI du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)	33
8.8 Positions singulières dun robot 6R.....	35
8.9 TD robot manipulateur planaire à 4 ddl	36
9.Utilisation des modèles	37
10.Générateur de trajectoire.....	38
10.1 Principe	38
10.2 Algorithme de génération de trajectoire.....	39
10.3 Exemple de générateur de trajectoire pour un robot à 2 ddl	40
11. Introduction sur les robots parallèles	41
11.1 Introduction :.....	41
11.2 Types d'articulations :.....	41
11.3 Robots parallèles planaires.....	42
11.4 Robots parallèles spatiaux.....	45
11.5 TD robot parallèle planaire	49
11.6 TD robot parallèle spatial.....	50
ANNEXES[KHALIL&DOMBRE1999]	51

Bibliographie :

[Khalil&Dombre1999]Wisama Khalil et Etienne Dombre
« Modélisation Identification et Commande de robots »Hermès 1999

1. Introduction

La Robotique

Définition :

Robot : Système complexe capable, grâce à ses fonctions de manipulation et (ou) de locomotion, de remplacer l'homme dans la réalisation de tâches répétitives, dangereuses ou inaccessibles.

Robot = bras manipulateur / base mobile / bras manipulateur monté sur 1 base mobile,
 + motorisation + système de perception + programmation et interface homme machine.

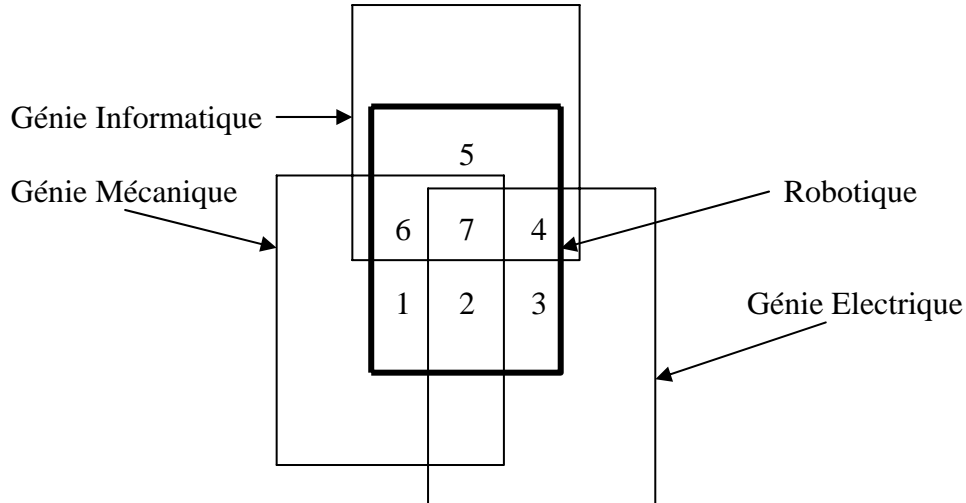
Un robot est conçu pour réaliser des tâches entièrement autonome ou sous le contrôle d'un opérateur humain.

Origine du terme Robot : robota(slave) = travailleur terne
 Pièce de théâtre, "Rossum's Universal Robot " du romancier tchèque Karel Capek (1921), portant sur des êtres artificiels anthropomorphes répondant parfaitement aux ordres de leur maîtres.

Types de robotiques :

Types de robotiques	Tâches	Domaines d'application
Manufacturière /Substitution : - tâches simples, répétitives - environnement structuré, pré modélisé.	Manipulation d'outils : Soudure, collage, projection, peinture,... Manipulation de pièces : assemblage, manutention,...	Industries automobiles, aéronautique, agroalimentaire, pharmaceutique,...
Non manufacturière / coopération homme-machine : - tâches complexes - environnement non entièrement structuré	Surveillance, Intervention, Installation, maintenance, Manipulation, téléopération,...	Sécurité civile, militaire, agricole, minier, services, BTP, spatial, sous-marin, nucléaire, médical,...

2. Les disciplines de la Robotique



1. Process, Structure et modélisation mécanique, Préhension, Péri-robotique, Actionneurs hydrauliques et pneumatiques, capteurs, ...
2. Modèles cinématique/dynamique, contrôle/commande
3. Electronique de contrôle/commande, traitement des signaux, Actionneurs électriques, Automatique,...
4. Diagnostic, Architecture du contrôleur, Informatique temps réel, Vision, Modélisation des systèmes automatisés,...
5. IA, Structures/bases de données, langages orientés robotique, infographie,...
6. CAO, CFAO, Modeleurs, Planification,...
7. Intégration.

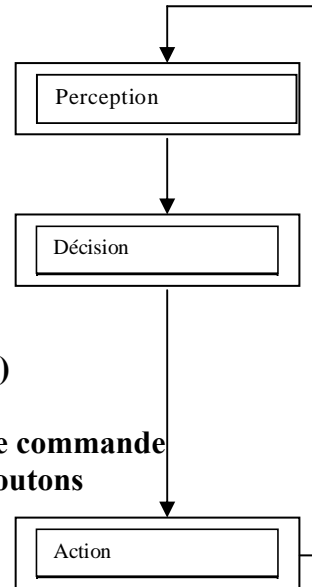
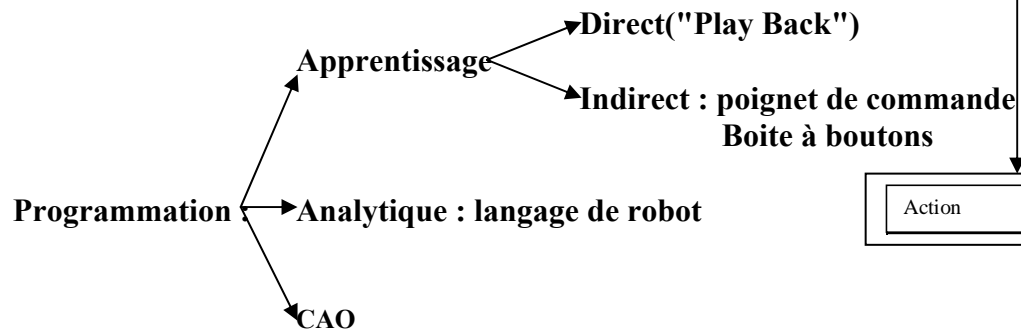
3. Constituants d'un robot

BLOCS FONCTIONNELS	ELEMENTS CONSTITUTIFS	FONCTIONS
STRUCTURE	Structure mécanique articulée et/ou structure mobile	ACTION sur l'environnement
APPAREIL SENSORIEL	.Capteurs proprioceptifs .Capteurs extéroceptifs	INFORMATION sur . configuration du robot . état de l'environnement
APPAREIL MOTEUR	Actionneurs : . électriques . hydrauliques . pneumatiques	ACTION sur la structure
EFFECTEUR	.Pince pour saisie d'objet .Torche de soudure .Porte outils ...	ACTION sur les objets de l'environnement du robot
SYSTEME DE COMMANDE	.Calculateur .Stratégies de commande .Niveaux de commande	COMMANDE CONTROLE DECISION
IHM	.Matériel : organe de saisie(syntaxeur, bras maître ...) .Logiciel de CAO-Robotique	INFORMATIONS sur la tâche du robot PROGRAMMATION hors ligne/en ligne

4. Fonctions d'un robot

Modélisation de capteurs
Modélisation d'environnement

Plan - Stratégie



5. Modélisation de robot manipulateur

Un modèle de robot sert à prévoir et à contrôler le comportement de celui-ci.

5.1 Hypothèses

Le robot est considéré comme une succession de corps solides C_i reliés par des articulations A_i .

Une articulation (rotoïde/prismatique) est supposée parfaite (sans jeux, ni frottements).

C_1, C_2, C_3 représente la structure de base du robot dite le porteur .

C_4, C_5, C_6 représente la structure de terminale du robot dite le poignet auquel est attaché l'effecteur.

A_1, A_2, A_3 sont quelconques,

A_4, A_5, A_6 sont rotoïdes à axes concourants et perpendiculaires 2 à 2,

La position du poignet p ne dépend que de C_1, C_2, C_3

La configuration de C_4, C_5, C_6 détermine l'orientation de l'effecteur autour de p .

Il y a découplage de la position de p et de l'orientation de l'effecteur autour de p . L'intérêt de ce découplage est de ramener le problème du calcul de la situation de l'effecteur à 2 sous problèmes indépendants à 3 paramètres chacun.

Nous étudierons les modèles des structures ouvertes series. Ceux-ci sont facilement extensibles aux cas des chaînes arborescentes. Les modèles des chaînes fermées sont plus complexes.

5.2 Définitions

Le calcul des modèles d'un robot manipulateur nécessite la définition d'un système de coordonnées articulaires attaché aux articulations robot et d'un système de coordonnées opérationnelles attaché à la base du robot.

$\underline{X} = (x_1, x_2 \dots x_m)^t$: coordonnées opérationnelles ,

$\underline{Q} = (q_1, q_2 \dots q_n)^t$: coordonnées articulaires,

q_i (prismatique/rotoïde) est associée à l'articulation i .

R_0 : repère de base du robot(il est souvent confondu avec R_1).

R_i : repère de l'articulation i du robot.

R_n : repère de l'effecteur du robot.

(Sauf stipulation contraire, ces repères sont orthonormés directs)

5.3 Modèle géométrique direct (MGD)

Le MGD permet d'effectuer un contrôle en absolu du robot. C'est la fonction f qui exprime la situation (\underline{X} : position+orientation) de l'effecteur en fonction de la configuration du robot (\underline{Q}) :

$$f : \underline{Q} \rightarrow \underline{X} = f(\underline{Q}) \quad (f \text{ non linéaire})$$

Le calcul du MGD nécessite la détermination des matrices $T_{i-1,i}$ de passage du repère R_{i-1} au repère R_i ($i=1..n$).

Ces matrices sont dites homogènes et expriment simultanément la position (translation) et l'orientation (rotation).

La position est exprimée par :

$$\underline{P} = (x_1, x_2, x_3)^t : \text{coordonnées cartésiennes/cylindriques/sphériques}$$

L'orientation est exprimée par :

$$\underline{\varphi} = (x_4, x_5 \dots x_m)^t : \text{angles d'Euler/cosinus directeurs/...}$$

Le calcul de la fonction f revient à déterminer la matrice T_{On} de passage du repère de base du robot à celui de l'effecteur.

5.4 Modèle géométrique inverse (MGI)

Le MGI permet d'effectuer une commande en absolu de l'effecteur du robot. C'est la fonction f^{-1} , si elle existe, qui exprime la configuration du robot (\underline{Q}) en fonction de la situation (\underline{X} : position+orientation) de l'effecteur :

$$f^{-1} : \underline{X} \rightarrow \underline{Q} = f^{-1}(\underline{X})$$

Le calcul du MGI est obtenu à partir du MGD soit en inversant la matrice T_{On} soit en déterminant, par substitution, \underline{Q} .

5.5 Modèle différentiel direct (MDD)

Le MDD permet d'effectuer un contrôle en relatif du robot. Il s'agit d'une linéarisation de la fonction f qui exprime la situation (\underline{X} : position+orientation) de l'effecteur en fonction de la configuration du robot (\underline{Q}) :

$$\underline{dX} = J(\underline{Q}) \underline{dQ} \quad \text{où } \underline{dX} : \text{différentielle des coordonnées opérationnelles,}$$

$$\underline{dQ} : \text{différentielle des coordonnées articulaires,}$$

$$J(\underline{Q}) : \text{matrice jacobienne du robot manipulateur.}$$

Le problème est de calculer $J(\underline{Q})$:

- Calcul indirect de $J(\underline{Q})$ (méthode analytique) :

Soit la matrice des dérivées partielles de f / coordonnées articulaires :

$$J(\underline{Q}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{Q}}(\underline{Q})$$

$$J_{ij}(\underline{Q}) = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\underline{Q}) \quad (i = 1..m ; j = 1..n)$$

Il s'agit du calcul des dérivées partielles des éléments de la matrice T_{On} (cf. §5.3)

• Calcul direct de $J(O)$ (méthode géométrique):

Cette méthode ne nécessite pas le calcul du MGD.

Un faible mouvement dq_i de la liaison i porté par \underline{z}_i engendre sur l'effecteur un faible déplacement \underline{dp}_i et une faible rotation $\underline{d\varphi}_i$.

$$\underline{dX} = (\underline{dP}, \underline{d\varphi})^t$$

- Si la liaison i est prismatique :

$$\underline{dp}_i = dq_i \cdot \underline{z}_i$$

$$\underline{d\varphi}_i = 0$$

- Si la liaison i est rotoïde :

- Contribution de la translation:

$$\underline{dp}_i = (dq_i \cdot \underline{z}_i) \times O_i O_n$$

$$= \underline{d\varphi}_i \times O_i O_n$$

- Contribution de la rotation:

$$\underline{d\varphi}_i = dq_i \cdot \underline{z}_i$$

Chaque articulation apporte sa contribution:

$$\underline{dp} = \sum_{i=1}^n dp_i$$

$$\underline{d\varphi} = \sum_{i=1}^n d\varphi_i$$

Le bilan de ces translations et rotations apparaît dans la matrice jacobienne intrinsèque suivante :

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \dots & \underline{\vec{z}}_i & \dots & \underline{\vec{z}}_j \times \overrightarrow{O_j O_n} & \dots \\ \dots & \vec{0} & \dots & \underline{\vec{z}}_j & \dots \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne extrinsèque s'obtient par une projection dans Ro de la matrice ci-dessus:

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \dots & \underline{\vec{z}}_{i/Ro} & \dots & \underline{\vec{z}}_j \times \overrightarrow{O_j O_{n/Ro}} & \dots \\ \dots & \vec{0} & \dots & \underline{\vec{z}}_{j/Ro} & \dots \end{pmatrix}$$

5.6 Modèle différentiel inverse (MDI)

Le MDI permet d'effectuer une commande en relatif de l'effecteur du robot. Il s'agit d'une linéarisation de la fonction f^{-1} , si elle existe, qui exprime la configuration du robot (Q) en fonction de la situation (X : position+orientation) de l'effecteur:

$$\underline{dQ} = J^{-1}(Q) \underline{dX} \text{ où } \underline{dX} : \text{différentielle des coordonnées opérationnelles,}$$

$$\underline{dQ} : \text{différentielle des coordonnées articulaires,}$$

$$J^{-1}(Q) : \text{matrice jacobienne inverse du robot manipulateur.}$$

Le problème est de calculer $J^{-1}(Q)$:

- Différentiation du MGI (méthode analytique)
- Calcul de J^{-1} par différentes méthodes :
 - co-facteurs,
 - inversion par blocs

$$J_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} A_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ C_{3 \times 3} & D_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} A^{-1}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ -D^{-1}_{3 \times 3} C_{3 \times 3} A^{-1}_{3 \times 3} & D^{-1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

- Calcul de J^+ (méthode de la pseudo inverse) :

$$J^+ = (J^t \cdot J)^{-1} \cdot J^t$$

6. Structures de base de robot manipulateur

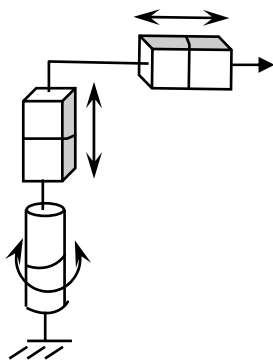
6.1 Principaux porteurs

Exo : Donner le volume de travail pour chacune des structures de base (1 à 5) sachant que :

- La rotation permise par toute liaison rotoïde varie entre 0° et 360° .
 - La translation permise par toute liaison prismatique varie entre 0° et L .
- La longueur de chaque corps du robot est égale à L s'il supporte une liaison rotoïde ou nulle s'il supporte une liaison prismatique.

6.1.1. Structure RPP ou PRP

Exemples : VERSATRAN "Séries E et F"

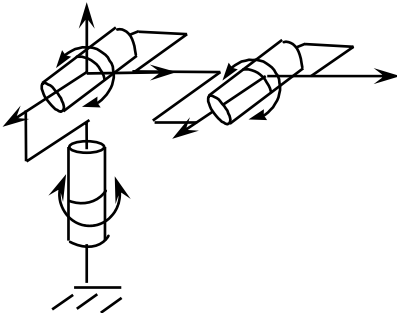


Ce type de structure est bien adaptée à un repérage de l'O.T.(Organe Terminal) en coordonnées cylindriques.

Volume =

6.1.2 Structure RRR

Exemples : CINCINNATI-MILACRON "T3", RENAULT "V80", UNIMATION "Unimate 6000"...

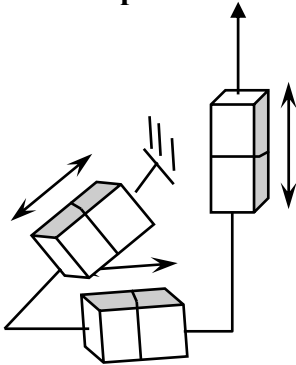


Ce type de structure est bien adaptée à un repérage de l'O.T. dans un système de coordonnées qualifiées d'anthropomorphes par analogie avec le bras humain.

Volume =

6.1.3. Structure PPP

Exemples : OLIVETTI "Sigma", HI-T-HAND2, RENAULT "P80"

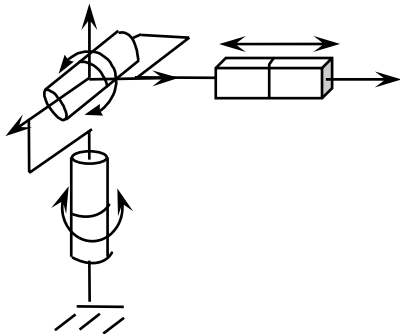


Ce type de structure est bien adaptée à un repérage de l'O.T. en coordonnées cartésiennes.

Volume =

6.1.4 Structure RRP

Exemples : POLAR "6000", UNIMATION "Unimate 1000, 2000, ..."

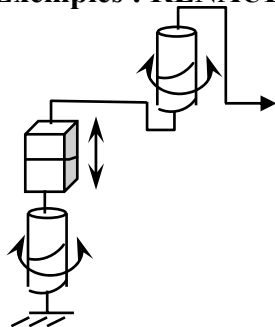


Ce type de structure est bien adaptée à un repérage de l'O.T. en coordonnées polaires .

Volume =

6.1.5. Structure RPR ou PRR ou RRP

Exemples : RENAULT "Horizontal 80"



Ce type de structure est bien adaptée à un repérage de l'O.T. en coordonnées toriques.

Volume =

6.2 Redondance de robot

6.2.1. Indices de mobilité et de liberté

.INDICE DE MOBILITE (**IM**) DE ROBOT = nombre
d'articulations rotoïde/prismatique du bras du robot
(*Dimension de l'espace articulaire/configurations (q)*)

1 articulation \leftrightarrow 1 moteur à commander

.INDICE (DEGRE) DE LIBERTE (**IL** ou **DDL**) DE ROBOT =
nombre de mouvements indépendants de l'organe terminal

(*Dimension de l'espace opérationnel (X)*)

($IL=DDL \leq 6$)

1 mvt indépendant \leftrightarrow n moteurs

$\Rightarrow IL \leq IM$

si ($IL = IM \forall$ config. du robot) alors
le robot est NON REDONDANT

sinon

si ($IL < IM$ pour certaines config.) alors
le robot est LOCALEMENT REDONDANT

\Rightarrow SINGULARITES

fsi

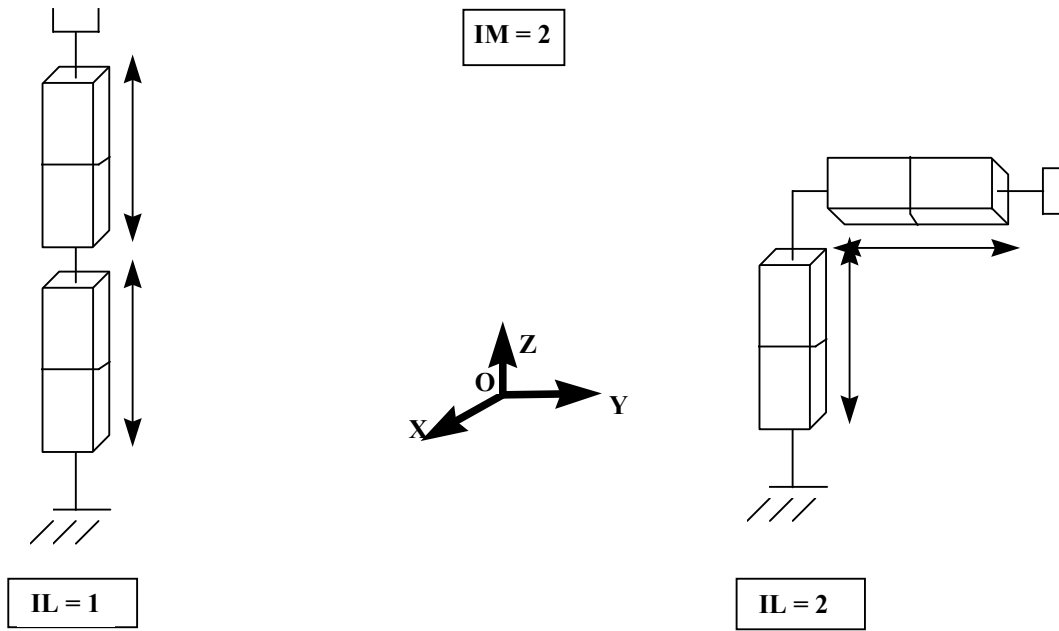
si ($IL < IM \forall$ config. du robot) alors
le robot est REDONDANT

fsi

fsi

6.2.2. Exemples

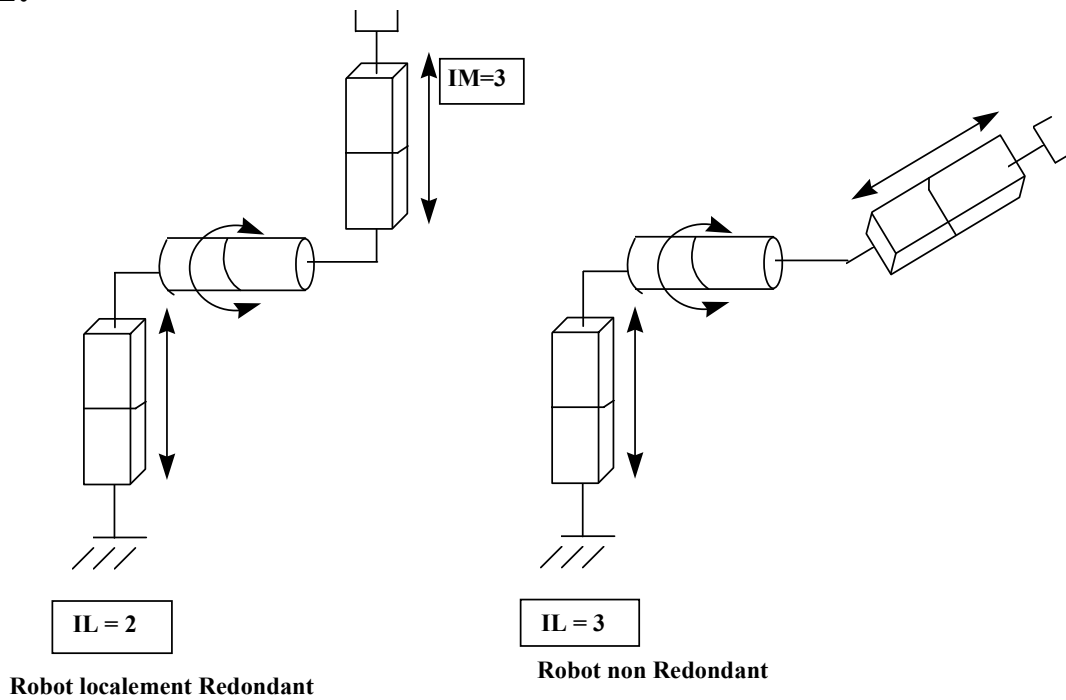
1.



Robot Redondant

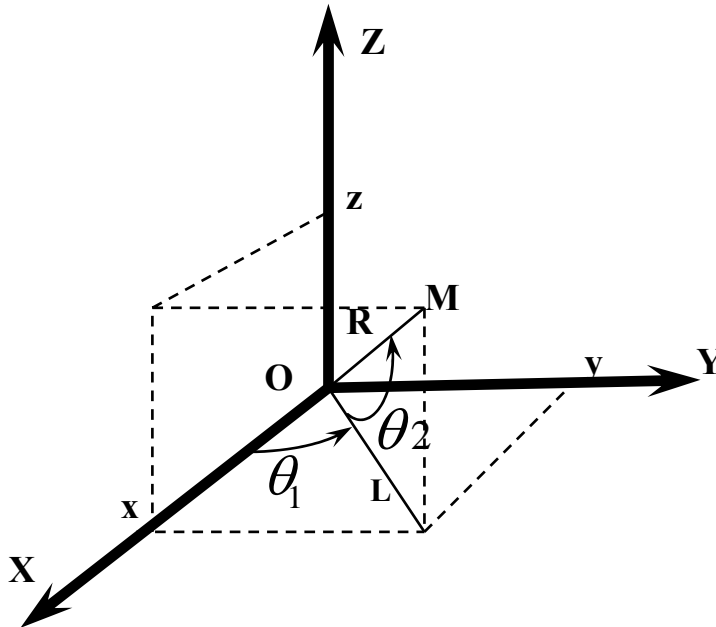
Robot non redondant

2.



7. Modèles de la structure de base du robot

7.1. Localisation et orientation d'un objet dans l'espace



. Coordonnées d'un point M (\rightarrow 3ddl)

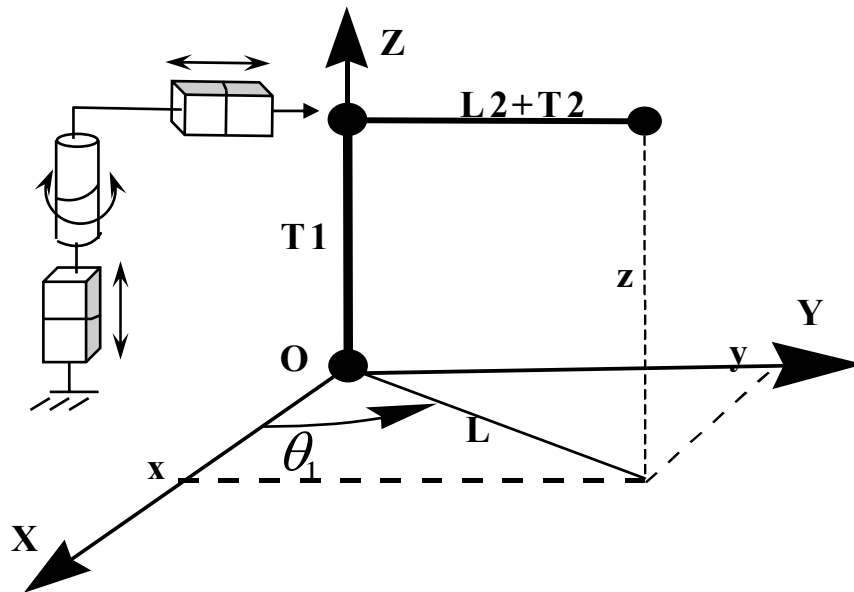
- Cartésiennes : x, y, z
- Polaires : θ_1, θ_2, R
- Cylindriques : θ_1, L, z

. Orientation de l'objet (\rightarrow 3ddl)

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$

\rightarrow Plusieurs représentations de la rotation

7.2 Structure de base PRP



1. Transformateur de coordonnées direct :

$$\underline{X} = f(\underline{q}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T_1 \\ \theta_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L2 + T2)c\theta_1 \\ (L2 + T2)s\theta_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

2. Transformateur de coordonnées inverse :

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \theta_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \text{arctg}(y/x) \\ -L_2 + y/s\theta_1 \end{pmatrix}$$

existence - solutions multiples - singularités

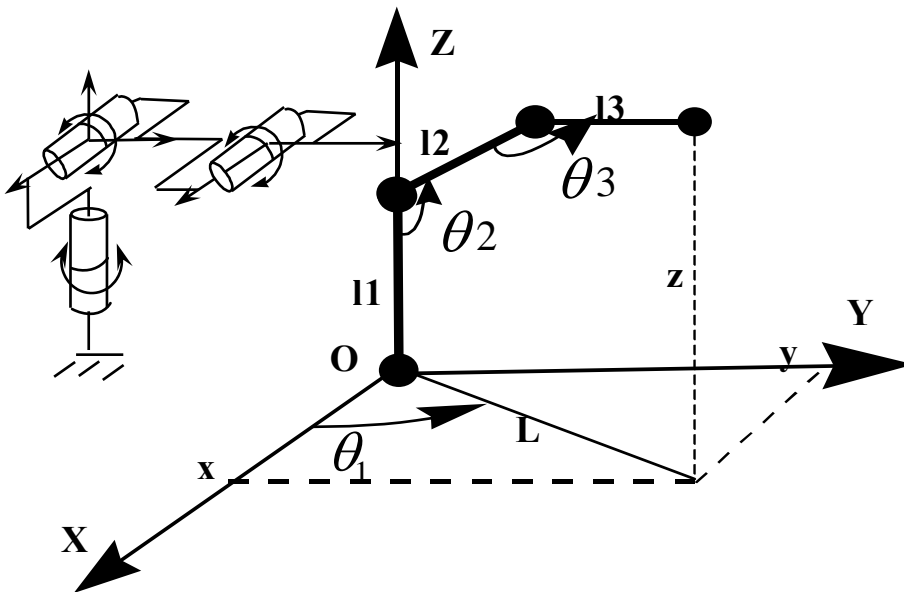
3. Transformateur de coordonnées différentiel direct (à compléter):

$$\underline{dX} = J(\underline{q}).\underline{dq} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

4. Transformateur de coordonnées différentiel indirect (à compléter):

$$\underline{dq} = J^{-1}(\underline{q}).\underline{dX} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dT_1 \\ d\theta_1 \\ dT_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

7.3 Structure de base RRR



1. Transformateur de coordonnées direct :

$$\underline{X} = f(\underline{q}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lc\theta_1 \\ Ls\theta_1 \\ l_1 + l_2c(\pi - \theta_2) + l_3c(2\pi - \theta_2 - \theta_3) \end{pmatrix}$$

avec $L = l_2c(\pi/2 - \theta_2) + l_3c(\theta_2 + \theta_3 - 3\pi/2)$

Cette application est non linéaire et non bijective

2. Transformateur de coordonnées inverse (à calculer)

$$\underline{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$

Notation :

$$\cos(q_i) = cq_i; \sin(q_i) = sq_i$$

7.4 Principaux types d'équations [Khalil&Dombre1999]

Type 1	$X r_i = Y$
Type 2	$XS\theta_i + YC\theta_i = Z$
Type 3	$X_1S\theta_i = Y_1$ $X_2C\theta_i = Y_2$
Type 4	$X_1r_jS\theta_i = Y_1$ $X_2r_jC\theta_i = Y_2$
Type 5	$X_1S\theta_i = Y_1 + Z_1 r_j$ $X_2C\theta_i = Y_2 + Z_2 r_j$
Type 6	$W S\theta_j = XC\theta_i + YS\theta_i + Z_1$ $W C\theta_j = XS\theta_i - YC\theta_i + Z_2$
Type 7	$W_1C\theta_j + W_2S\theta_j = XC\theta_i + YS\theta_i + Z_1$ $W_1S\theta_j - W_2C\theta_j = XS\theta_i - YC\theta_i + Z_2$
Type 8	$XC\theta_i + YC(\theta_i + \theta_j) = Z_1$ $XS\theta_i + YS(\theta_i + \theta_j) = Z_2$
Type 9	$XC\theta_i = Y$
Type 10	$XS\theta_i = Y$

r_i : variable d'une articulation prismatique,
 $S\theta_i, C\theta_i$: sinus et cosinus de la variable θ_i d'une articulation rotoïde.

Type 1	$X r_i = Y$
--------	-------------

Type 2	$XS\theta_i + YC\theta_i = Z$
--------	-------------------------------

Type 3	$X_1 S\theta_i = Y_1$ $X_2 C\theta_i = Y_2$
--------	--

Type 4	$X_1 r_j S\theta_i = Y_1$ $X_2 r_j C\theta_i = Y_2$
--------	--

Type 5	$X_1 S\theta_i = Y_1 + Z_1 r_j$ $X_2 C\theta_i = Y_2 + Z_2 r_j$
--------	---

Type 6	$W S\theta_j = XC\theta_i + YS\theta_i + Z_1$ $W C\theta_j = XS\theta_i - YC\theta_i + Z_2$
--------	---

Type 7	$W_1 C\theta_j + W_2 S\theta_j = XC\theta_i + YS\theta_i + Z_1$ $W_1 S\theta_j - W_2 C\theta_j = XS\theta_i - YC\theta_i + Z_2$
--------	---

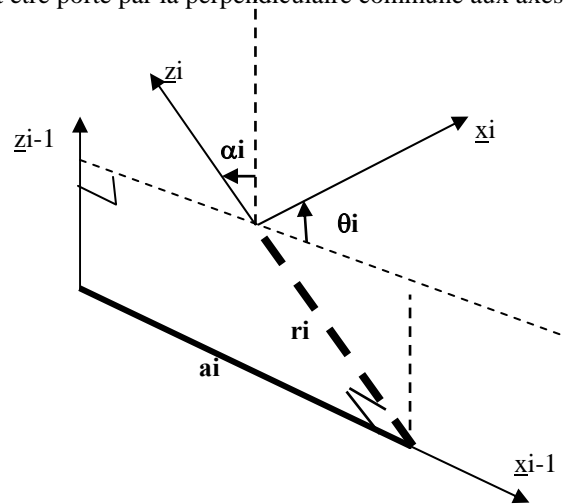
Type 8	$XC\theta_i + YC(\theta_i + \theta_j) = Z_1$ $XS\theta_i + YS(\theta_i + \theta_j) = Z_2$
--------	---

8. Exemples de modélisation de robot manipulateur

8.1 Paramètres de Denavit - Hartenberg

hypothèses:

- . \underline{z}_i est placé, arbitrairement, sur l'axe du mouvement de l'articulation i ,
- . \underline{y}_i complète le trièdre direct.
- . L'axe \underline{x}_{i-1} doit être porté par la perpendiculaire commune aux axes \underline{z}_{i-1} et \underline{z}_i



Paramètres du bras (statiques) :

a_i : longueur (≥ 0) de perpendiculaire commune entre \underline{z}_{i-1} et \underline{z}_i les reliant le long de \underline{x}_{i-1}

α_i : angle entre \underline{z}_{i-1} et \underline{z}_i mesuré autour de \underline{x}_{i-1}

Paramètres de l'articulation (dynamiques) :

r_i : distance algébrique le long de \underline{z}_i du support de \underline{x}_{i-1} au support de \underline{x}_i
 (Coordonnée articulaire si liaison prismatique)

θ_i : angle entre \underline{x}_{i-1} et \underline{x}_i mesuré autour de \underline{z}_i
 (Coordonnée articulaire si liaison rotoïde)

Matrice de passage du repère R_{i-1} au repère R_i :

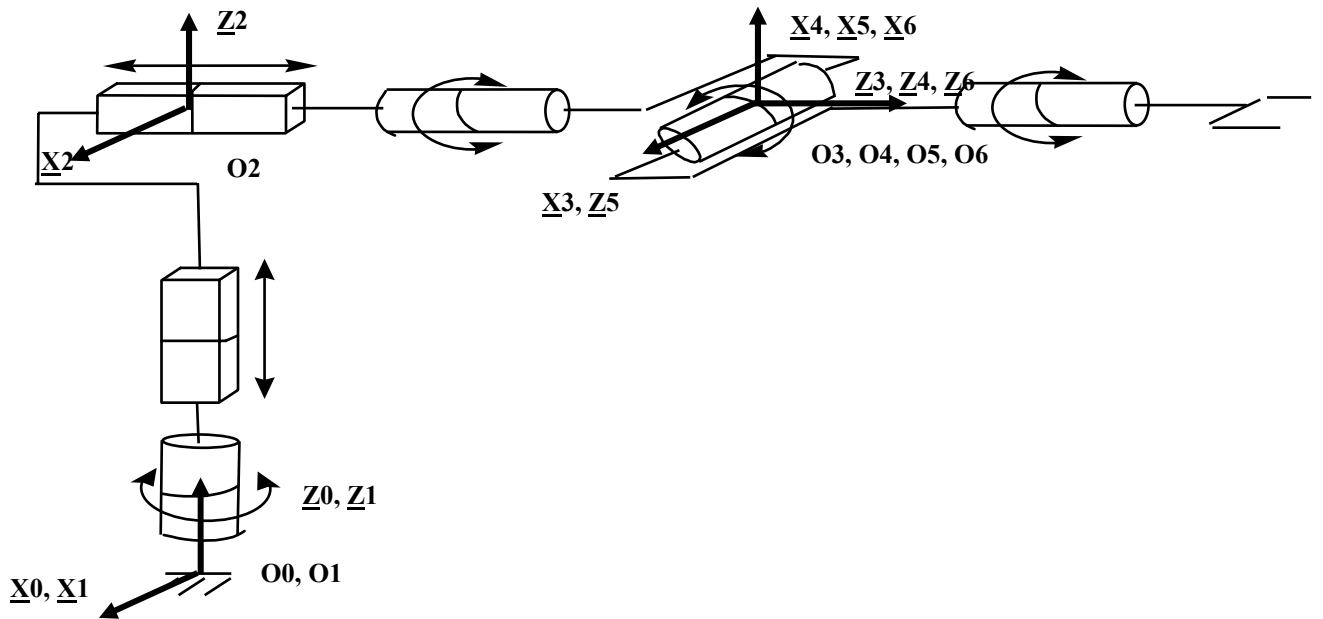
$$T_{i-1,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_i \\ c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i & -r_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & r_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Règles de construction des repères associés aux articulations du robot :

- . Considérer le robot dans une configuration initiale ("zéro") qui simplifie les calculs ($q=0$)
- . Tout axe \underline{z}_i doit être placé le long de l'articulation i .
- . A chaque articulation i est associé un repère R_i dont l'emplacement doit être judicieusement choisi pour simplifier les calculs.

8.2 Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)



Paramètres de Denavit-Hartenberg de ce robot:

Parmètre \ i	1	2	3	4	5	6
σ_i	0	1	1	0	0	0
α_i	0	0	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	$\pi/2$
a_i	0	0	0	0	0	0
θ_i	q_1	0	0	q_4	q_5	q_6
r_i	0	q_2	q_3	0	0	0
q_i selon fig.	0	>0	>0	$-\pi/2$	0	0

$$q_i = \bar{\sigma}_i \theta_i + \sigma_i r_i$$

$\sigma_i = 0$ (rotoïde) / $\sigma_i = 1$ (prismatique) ;

Matrices de passage (à compléter) :

$$T_{01} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{34} = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{45} = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{56} = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(q_i) = c_i; \sin(q_i) = s_i$$

8.4 MGD du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)

$$T_{01} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{34} = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{45} = \begin{pmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_{56} = \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poignet :

$$T_{06} = \prod_{i=1}^6 T_{i-1,i} = (\bar{x}_6 \quad \bar{y}_6 \quad \bar{z}_6 \quad O_6)_{/Ro}$$

$$O_{6/Ro} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \text{ et } \bar{x}_6 = \begin{pmatrix} x_x \\ x_y \\ x_z \end{pmatrix}; \bar{z}_6 = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix}$$

Pince définie dans R_7 :

$$\overrightarrow{O_6 O_7} = r_7 \bar{z}_6 \text{ et } \bar{x}_7 = \bar{x}_6; \bar{z}_7 = \bar{z}_6$$

$$O_{7/Ro} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + r_7 z_x \\ p_y + r_7 z_y \\ p_z + r_7 z_z \end{pmatrix}$$

Le MGD est exprimé par :

$$T_{07} = (\bar{x}_7 \quad \bar{y}_7 \quad \bar{z}_7 \quad O_7) = \begin{pmatrix} x_x & y_x & z_x & x \\ x_y & y_y & z_y & y \\ x_z & y_z & z_z & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 c_4 c_5 c_6 - c_1 s_4 s_6 + s_1 s_5 c_6 & -c_1 c_4 c_5 s_6 - c_1 s_4 c_6 + s_1 s_5 s_6 & c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5 & -s_1 q_3 + r_7 z_x \\ s_1 c_4 c_5 c_6 - s_1 s_4 s_6 - c_1 s_5 c_6 & -s_1 c_4 c_5 s_6 - s_1 s_4 c_6 - c_1 s_5 s_6 & s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5 & c_1 q_3 + r_7 z_y \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & -s_4 s_5 & q_2 + r_7 z_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.5 MDD du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)

$$dp = J \cdot dq \Leftrightarrow \begin{pmatrix} dp_x \\ dp_y \\ dp_z \\ d\varphi_x \\ d\varphi_y \\ d\varphi_z \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ dq_5 \\ dq_6 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \times \overrightarrow{O_1 O_6} & \vec{z}_2 & \vec{z}_2 & \vec{z}_4 \times \overrightarrow{O_4 O_6} & \vec{z}_5 \times \overrightarrow{O_5 O_6} & \vec{z}_6 \times \overrightarrow{O_6 O_6} \\ \vec{z}_1 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{z}_4 & \vec{z}_5 & \vec{z}_6 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} /_{Ro} ; \vec{z}_3 = \vec{z}_4 \quad \forall q_i \text{ et } O_4 = O_5 = O_6$$

D'où :

$$J = \begin{pmatrix} \vec{z}_0 \times \overrightarrow{O_0 O_6} & \vec{z}_0 & \vec{z}_3 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{z}_1 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{z}_4 & \vec{z}_5 & \vec{z}_6 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \vec{z}_{0/Ro} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{z}_{3/Ro} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{z}_{5/Ro} = \begin{pmatrix} -c_1 s_4 \\ -s_1 s_4 \\ -c_4 \end{pmatrix} ; \vec{z}_{6/Ro} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ z_z \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{O_0 O_{6/Ro}} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

D'où :

$$J = \begin{pmatrix} -p_y & 0 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_1 & -c_1 s_4 & z_x \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & -s_1 s_4 & z_y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & z_z \end{pmatrix}$$

Ainsi la différentielle de position du poignet est :

$$dp_x = -p_y dq_1 - s_1 dq_3 = -c_1 q_3 dq_1 - s_1 dq_3$$

$$dp_y = p_x dq_1 + c_1 dq_3 = -s_1 q_3 dq_1 + c_1 dq_3$$

$$dp_z = dq_2$$

la différentielle d'orientation du poignet est :

$$d\varphi_x = -s_1 dq_4 - c_1 s_4 dq_5 + z_x dq_6 = -s_1 dq_4 - c_1 s_4 dq_5 + (c_1 c_4 s_5 - s_1 c_5) dq_6$$

$$d\varphi_y = c_1 dq_4 - s_1 s_4 dq_5 + z_y dq_6 = c_1 dq_4 - s_1 s_4 dq_5 + (s_1 c_4 s_5 + c_1 c_5) dq_6$$

$$d\varphi_z = dq_1 - c_4 dq_5 + z_z dq_6 = dq_1 - c_4 dq_5 - s_4 s_5 dq_6$$

Le MDD global prenant en compte l'effecteur est :

à partir \vec{dp} et de $\vec{d\varphi}$ on obtient :

$$\vec{dx}_7 = \vec{dx}_6 = \vec{d\varphi} \times \vec{x}_6 = \begin{pmatrix} dx_x = d\varphi_y x_z - d\varphi_z x_y \\ dx_y = d\varphi_z x_x - d\varphi_x x_z \\ dx_z = d\varphi_x x_y - d\varphi_y x_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{dz}_7 = \vec{dz}_6 = \vec{d\varphi} \times \vec{z}_6 = \begin{pmatrix} dz_x = d\varphi_y z_z - d\varphi_z z_y \\ dz_y = d\varphi_z z_x - d\varphi_x z_z \\ dz_z = d\varphi_x z_y - d\varphi_y z_x \end{pmatrix}$$

$$d(O_0 O_7) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dp_x + a_7 x_x + r_7 z_x \\ dp_y + a_7 x_y + r_7 z_y \\ dp_z + a_7 x_z + r_7 z_z \end{pmatrix}$$

8.6 MGI du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)

Calculer les coordonnées articulaires $\underline{Q} = (q_1, q_2 \dots q_6)^t$, en fonction des coordonnées opérationnelles $\underline{X} = (x, y, z, x_x, x_y, x_z, z_x, z_y, z_z)^t$ en utilisant le MGD calculé précédemment.

→ q_2 ?

→ q_3 ?

→ q_1 ?

→ q_5 ?

→ q_4 ?

→ q_6 ?

8.7 MDI du Robot VERSATRAN FA (RPPRRR)

Calculer les différentielles des coordonnées articulaires $dQ = (dq_1, dq_2, \dots, dq_6)^t$, en fonction des différentielles des coordonnées opérationnelles

$dX = (dx, dy, dz, dx_x, dx_y, dx_z, dz_x, dz_y, dz_z)^t$ en utilisant le MDD calculé précédemment.

→ dq_2 ?

→ dq_3 ?

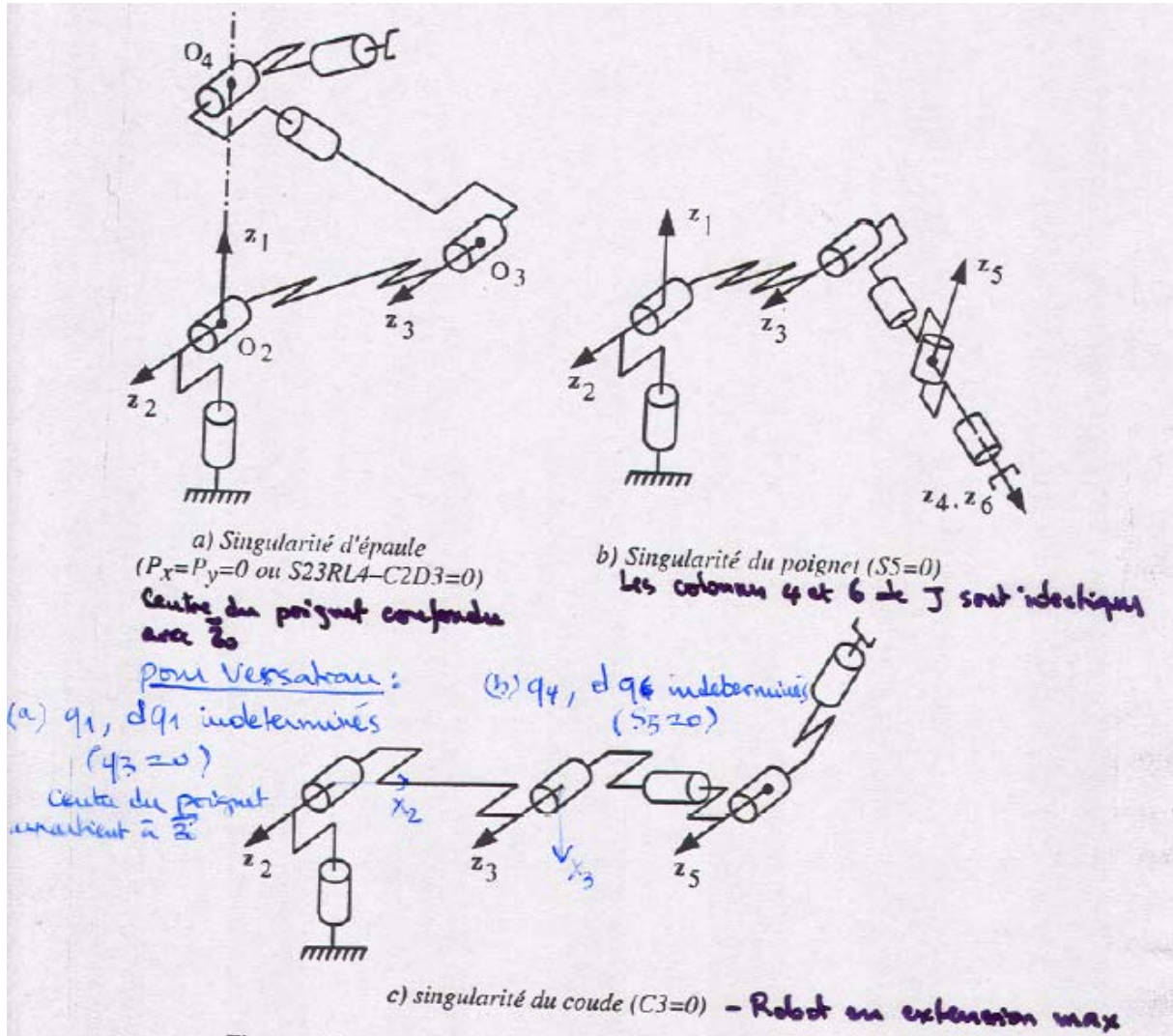
→ dq_1 ?

→ dq_5 ?

→ dq_6 ?

→ dq_4 ?

8.8 Positions singulières d'un robot 6R

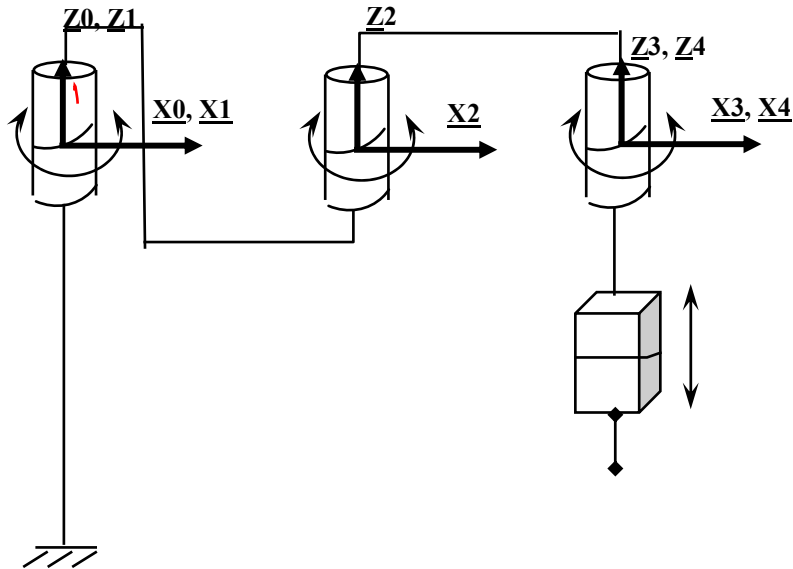


8.9 TD robot manipulateur planaire à 4 ddl

TD : Modélisation géométrique et différentielle de robot manipulateur

Le robot SCARA (IBM), représenté ci-dessous, est constitué d'un porteur de type torique(RRR) et d'un poignet à un degré de liberté. Ce robot est utilisé pour effectuer des tâches d'assemblage planaire.

SCARA : Selective Compliance Assembly Robot Arm (Société Sankyo – Japan)

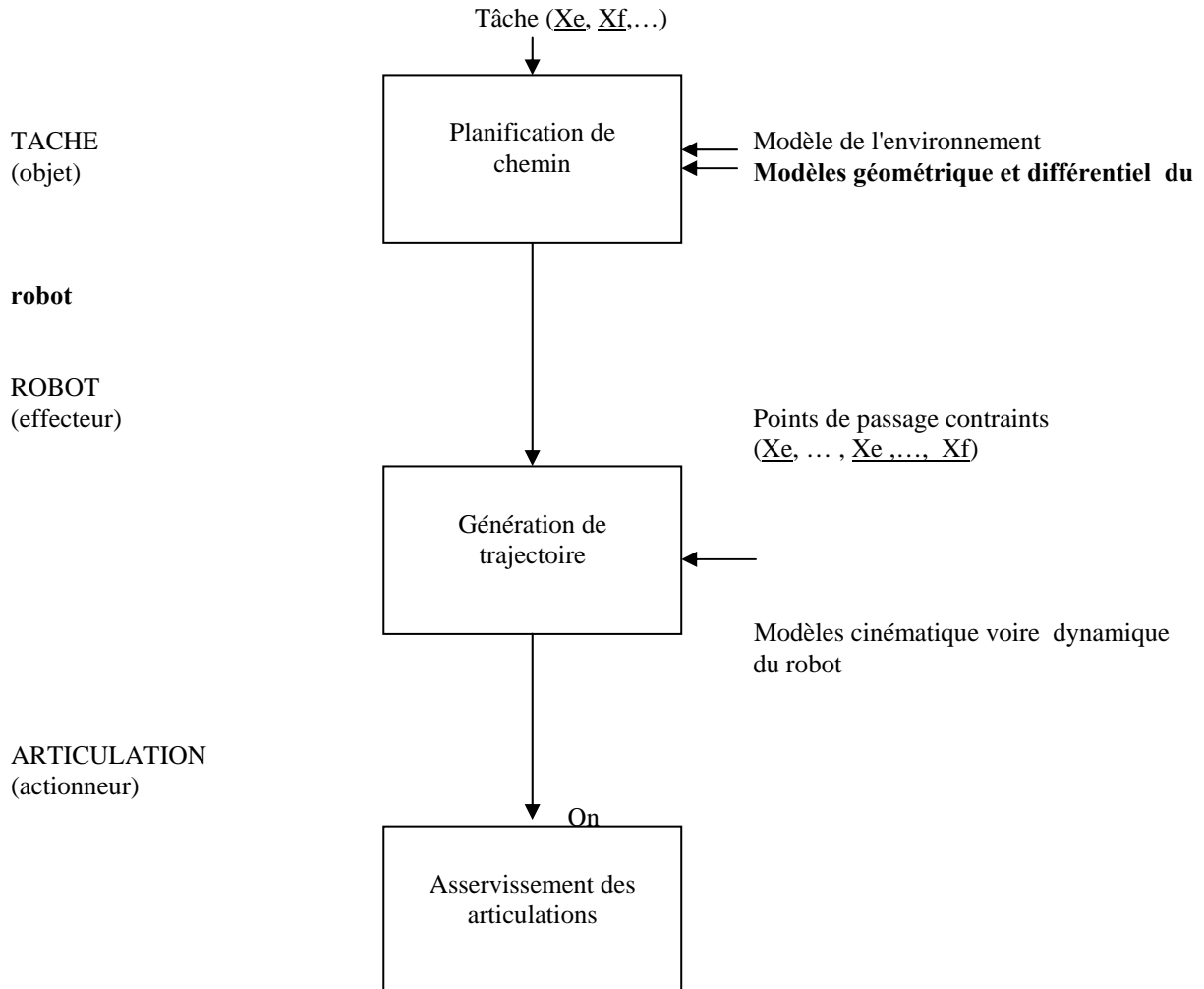


1. Déterminer les paramètres de Denavit-Hartenberg, selon la figure ci-dessus.
2. Calculer les modèles géométriques et différentiels direct et inverse du poignet de ce robot. Quelles sont les configurations singulières de ce robot.



9.Utilisation des modèles

Niveau de commande



10. Générateur de trajectoire

10.1 Principe

Le planificateur de chemin donne un chemin dans l'espace des coordonnées $\{\underline{X}_n\}$, compte tenu des points de départ \underline{X}_o et final \underline{X}_f et des contraintes d'environnement et de celles de la tâche ($\underline{X}'_n, \underline{t}_n, \dots$).

Le chemin $\{\underline{X}_n\}$ est traduit dans l'espace des coordonnées articulaires par un chemin $\{\underline{q}_n\}$.

Le générateur de trajectoires crée une trajectoire $q(t)$ compte tenu des capacités cinématique et dynamique de la structure mécanique et éventuellement du temps imparti.

Les contraintes cinématique et dynamique sont q'_{\max} , q''_{\max} , continuité de $q'(t)$.

Le planificateur de chemin doit spécifier :

- les points de passage précis, leur vitesse,
- les points de passage approchés, l'erreur admissible en ces points,
- le type d'interpolation (libre/imposée ; linéaire/circulaire).

10.2 Algorithme de génération de trajectoire

Pas 1 :

- Chemin en coordonnées opérationnelles transformé en chemin en coordonnées articulaires :

$$\{\underline{q}_n\} = \text{MGI}[\underline{X}_n],$$

- calcul des points de passage précis et vitesses associées,
- calcul des points de passage approchés et des erreurs acceptables associées

$$\{\underline{dq}_n\} = \text{MDI}[\underline{dX}_n],$$

Pas 2 :

Pour chacun des axes $k = 1, \dots, n$

1. Etablir une trajectoire en tenant compte des points de passage précis et leur vitesse et des points de passage approchés et des erreurs acceptables.
2. Décomposer cette trajectoire en tranches de temps telles que $\ddot{q} = \text{cte}$ sur chacune (phases),
3. Lorsque $\ddot{q} \neq 0$, faire $|\ddot{q}| = \ddot{q}_{\text{max}}$, vérifier si la phase vitesse constante existe et choisir le profil adapté,
4. Calculer les temps t_{ik} (phases à vitesse variable),
 t_{jk} (phases à vitesse constante).

Pas 3 :

Pour chaque phase (définie par $\ddot{q} = \text{cste}$) déterminer l'axe le plus contraint et synchroniser les autres sur lui.

$$t_i = \text{Max}_k \{ t_{ik} \}; \quad t_{ij} = \text{Max}_k \{ t_{ijk} \}$$

Pas 4 :

Définir une commande synchrone $q_k(t)$ sur chacun des axes selon t_i et t_{ij} communs à tous les axes.

Pas 5 :

A partir des t_i et t_{ij} , déterminer les \ddot{q}_{ik} pour chacune des phases et des chacun des axes.

10.3 Exemple de générateur de trajectoire pour un robot à 2 ddl

Une structure mécanique articulée (SMA) comporte deux articulations rotoïdes de variables q_1 et q_2 . La tâche est définie dans un repère cartésien (O,X,Y,Z). La figure 1 donne la situation de la SMA et définit q_1 et q_2 (angle du bras par rapport à l'horizontale). La flèche indique le signe + pour l'angle correspondant. La longueur des bras est $L_1=0,5m$, $L_2=1m$.

Pour les positions successives du point P, la tâche est définie par le tableau suivant (dimensions en mètre):

Point de départ: P0 ($X_0 = \sqrt{3}/2$, $Y_0=Z_0=0$), vitesse nulle

Point de passage approché: P1 ($X_1=0$, $Y_1=1$, $Z_1=1/2$), vitesse ($dX/dt = dY/dt = 0$, $dZ/dt = 0,2 \text{ ms}^{-1}$), approximation de position ($dX=0,1$, dY non précisée, $dZ=0$).

Point d'arrivée: P2 ($X_2=0,86$, $Y_2=0$, $Z_2=1$), vitesse nulle.

La loi de commande de chacun des axes est telle que l'accélération est une grandeur constante positive, négative ou nulle. Les deux commandes doivent être synchrones: les différentes phases de la commande sont les mêmes sur chacun des axes.

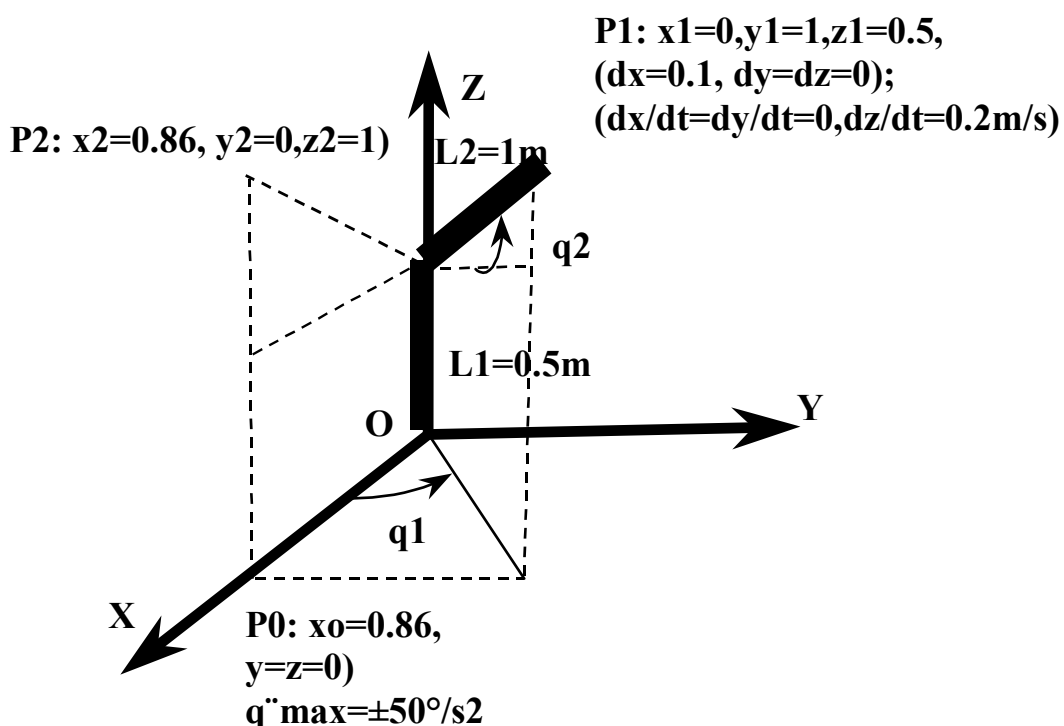
Les contraintes cinématiques à respecter sont les suivantes:

accélération articulaire maximale: $\pm 50 \text{ }^\circ\text{s}^{-2}$

vitesse articulaire maximale: $\pm 3 \cdot 180/\pi \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$ (171,88)

1. Etablir les Modèles Géométrique (Différentiel) Direct (Inverse).
2. Déterminer $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, $\ddot{q}_1(t)$, $\ddot{q}_2(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$.
(vérifier si la vitesse maximale est atteinte ou non)

Déterminer les lois de commande synchrones des 2 axes q_1 et q_2 du robot RR ci-dessous pour le faire évoluer de P0 à P2 via P1 :



11. Introduction sur les robots parallèles

11.1 Introduction :

Un manipulateur parallèle est constitué d'une base fixe et d'un organe terminal à n degrés de liberté reliés entre eux par des chaînes cinématiques (« jambes ») fermées motorisée partiellement.

Domaines d'applications : simulateurs de conduite, de vol. Testeurs de pneumatiques. Assemblage, transfert rapide de pièces. Machines outils,...

+sieurs chaînes cinématiques // → avantages:



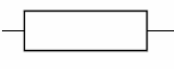



- charge élevée , accélérations élevées, rigidité mécanique élevée,
- faible masse mobile, faible erreur de répétabilité,
- actionneurs directement sur la base fixe, facilité d'intégration de capteurs,
- construction mécanique modulaire,
- effet des tolérances de fabrication sur la précision limité

→ micro-manipulation.

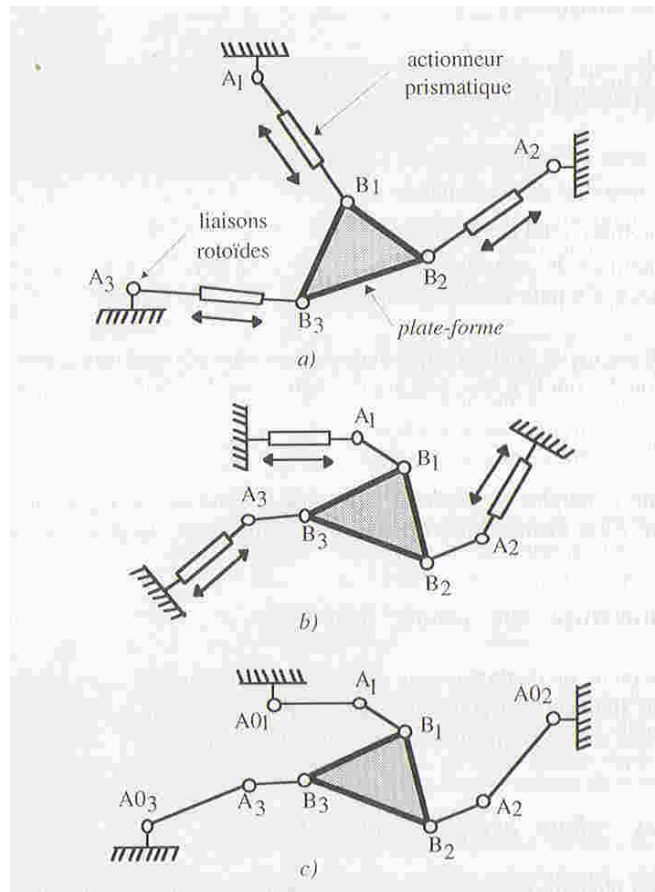
Inconvénients/ robots sériels :

- volume de travail limité,
- modèles géométriques parfois difficiles à déterminer,
- pas de trajectoire « naturelle »,
- présence de singularités,
- couplage variable entre les différentes chaînes cinématiques;

11.2 Types d'articulations :

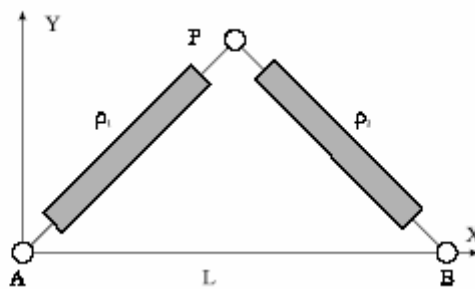
Nom	Schéma de l'articulation	
Pivot ou rotoïde		non motorisée R
		motorisée <u>R</u>
Prismatique		non motorisée P
		motorisée <u>P</u>
Sphérique		non motorisée S
		motorisée <u>S</u>

11.3 Robots parallèles planaires



Exemples d'architectures de robots planaires(plate forme à 3ddl) :
 (a) : **3RPR** ; (b) : **3PRR** ; (c) : **3RRR**

11.3.1 Robot // manipulateur Plan 2RPR



MGI : $P(X,Y)$ et L (distance entre les points pivots A et B), calculer ρ_1 et ρ_2 connus:

$$\begin{cases} \rho_1^2 = X^2 + Y^2 \\ \rho_2^2 = (X - L)^2 + Y^2 \end{cases}$$

MGD : connaissant le MGI et L , calculer X et Y :

$$X = (\rho_1^2 - \rho_2^2 + L^2) / 2L ;$$

$$Y = \sqrt{\rho_1^2 - [(\rho_1^2 - \rho_2^2 + L^2) / 2L]^2}$$

(2 solutions symétriques par rapport à l'axe AB)

MDI : Connaissant le MGI, calculer les jacobiennes A et B telle que :

$$A \dot{X} + B \dot{q} = 0$$

avec :

$$\square A = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x-2L & 2y \end{bmatrix}$$

$$\square B = \begin{bmatrix} -2\rho_1 & 0 \\ 0 & -2\rho_2 \end{bmatrix}$$

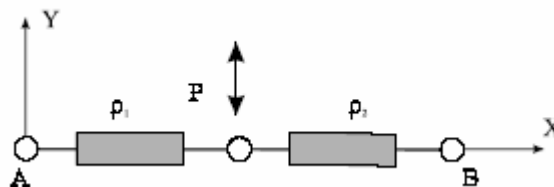
($dX = J.dq$ avec $J=A^{-1}.B$ (A est la jacobienne parallèle et B la jacobienne série))

$$\rightarrow \det J := \rho_1 * \rho_2 / Ly$$

Configuration singulière :

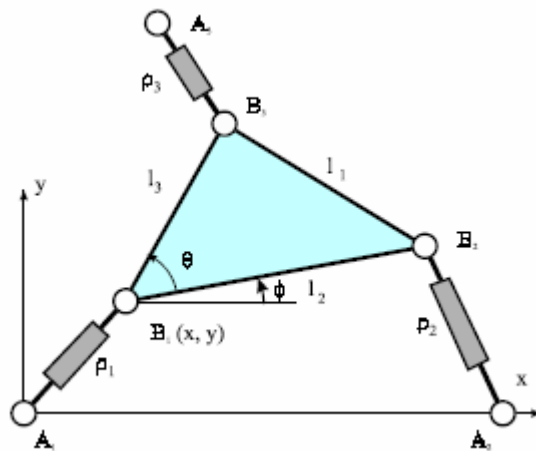
Une singularité se caractérise par une perte de rang d'une matrice jacobienne (perte de degrés de liberté de l'organe terminal). Les singularités induisent :

- instabilité de l'organe terminal (exemple ci-dessous, ($y=0$))
- atteinte des limites de l'espace de travail (Si $\rho_1 = \rho_2 = 0$)



Exemple de singularité // (A, P et B sont alignées $\rightarrow y=0$) ou P peut osciller alors que les moteurs sont bloqués.

11.3.2 Robot // manipulateur Plan 3RPR

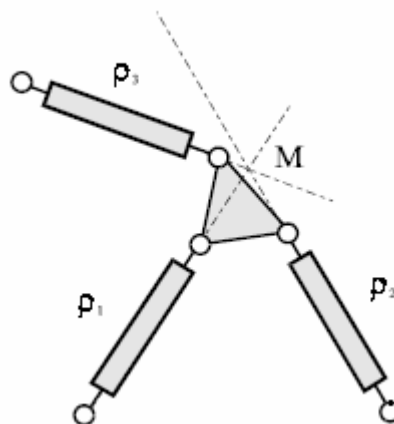


MGI :

$$\begin{cases} \rho_1^2 = x^2 + y^2 \\ \rho_2^2 = (x + l_2 \cos(\phi) - c_2)^2 + (y + l_2 \sin(\phi))^2 \\ \rho_3^2 = (x + l_3 \cos(\phi + \theta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin(\phi + \theta) - d_3)^2 \end{cases}$$

où $c_2 = \|A_1 A_2\|$; $c_3 = \|A_1 A_3(\text{projeté sur X})\|$; $d_3 = \|A_1 A_3(\text{projeté sur Y})\|$

Singularités :

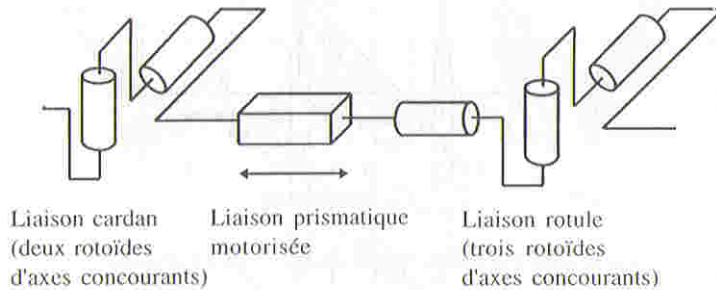


Singularité parallèle : axes passants par les 3 articulations se croisent en un point.

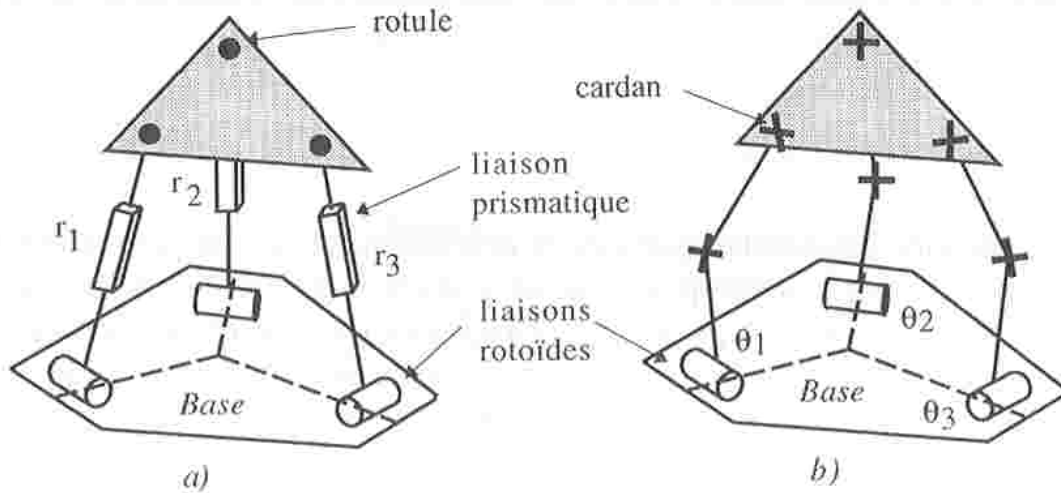
Singularité série : variable prismatique nulle (articulation en butée)

11.4 Robots parallèles spatiaux

11.4.1 Types de liaisons



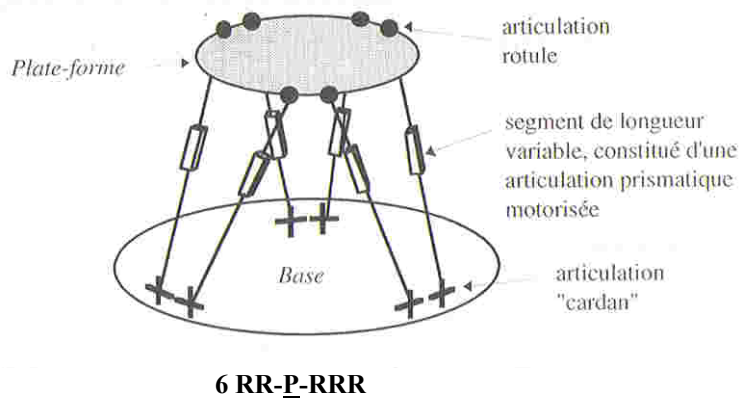
11.4.2 Robots parallèles spatiaux à 3 ddl



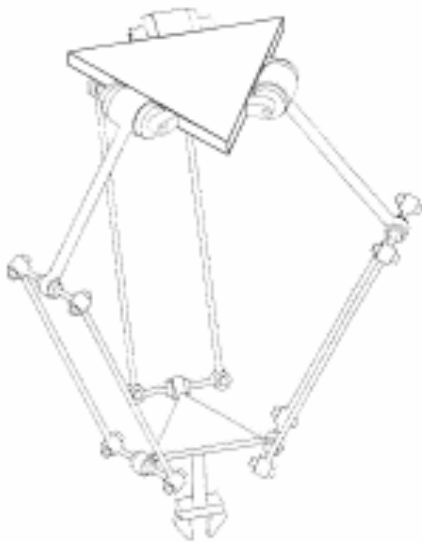
(a) : **3 R-P-RRR**

(b) : **3R-RR-RR**

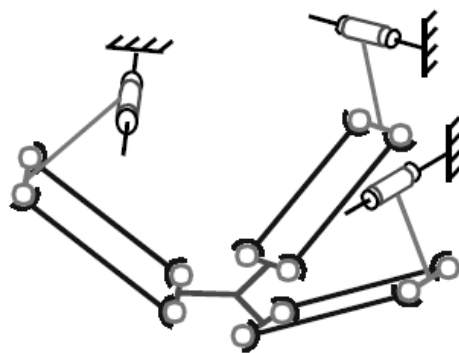
11.4.3 Robot parallèle spatial à 6 ddl



11.4.4 Exemple du robot parallèle Delta:



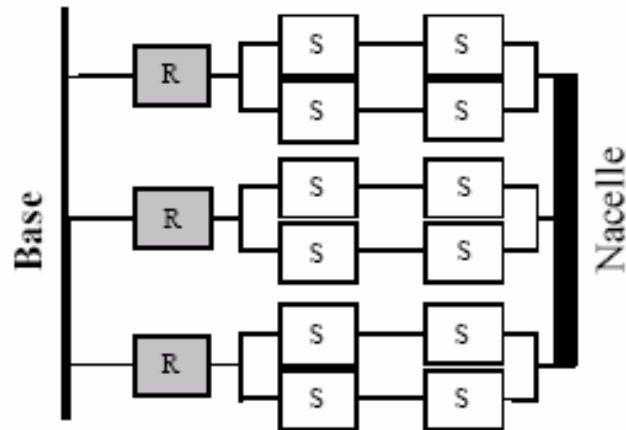
a - Cinématique du robot Delta



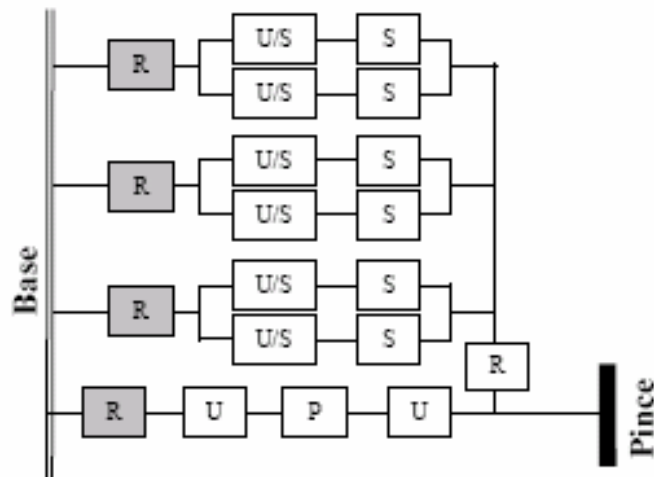
b-Conventions

Nom de la liaison	Représentation	
	Liaison passive	Liaison motorisée
Rotoïde (pivot)		
Prismatique (glissière)		
Universelle (cardan)		
Sphérique (rotule)		

c- Graphe d'agencement du robot Delta « manchot » :



d- Graphe d'agencement du robot Delta avec effecteur:



e-Degrés de mobilité et de liberté :

Formule de Grübler :

$$m = 6N_p - 6N_l + \sum_{i=1}^{N_l} dof_i - m_{int}$$

Où :

- m : nombre de degrés de liberté,
- N_p : nombre de solides indépendants (bâti exclu),
- N_l : nombre de liaisons entre ces solides,
- dof_i : nombre de degrés de liberté de la liaison i ,
- m_{int} : nombre de degrés de mobilité internes.

Exemple du robot Delta :
 $m = 6.10 - 6.15 + 39 - 6 = 3$

f – modèle géométrique inverse ?

Exemple de robots delta :



11.5 TD robot parallèle planaire

Exercice 1 :

avertissement: la résolution de cet exercice ne suppose pas d'avoir à développer de longs calculs (sauf peut-être pour la question 3).

Soit le robot parallèle **3RPR** représenté Figure 1

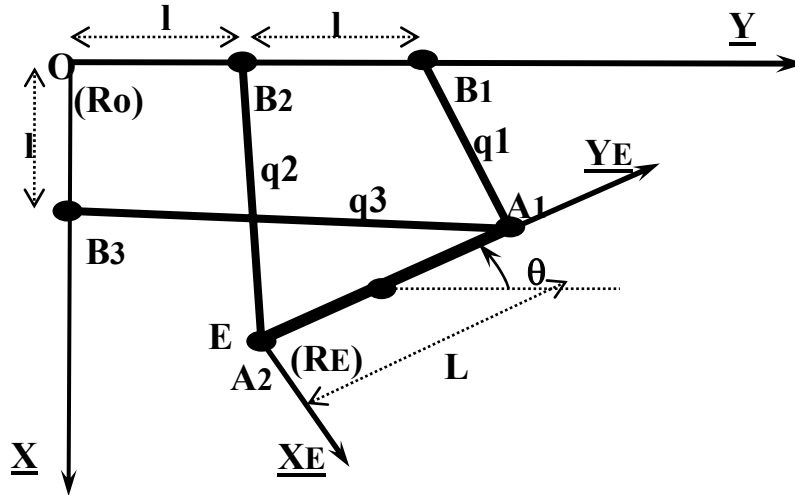


Figure 1: robot //

OXY constitue la base fixe du robot. $A1A2$ de longueur L est la partie mobile. Les segments (vérins) $B1A1$, $B2A2$ et $B3A1$ sont de longueurs variables $q1$, $q2$, $q3$. Les qi sont les variables articulaires. Les coordonnées opérationnelles sont X , Y et θ (X , Y sont les coordonnées cartésiennes dans Ro de E , confondu avec $A2$).

1. exprimer le modèle géométrique inverse $q = F^{-1}(X, Y, \theta)$ où $q = (q1, q2, q3)^t$.
2. donner des éléments du calcul du modèle géométrique direct. $X > 0$, $Y > 0$ et $\theta \in]0, \pi/2[$. On ne développera pas tous les calculs, mais on précisera la démarche.

Par la suite, on supposera connues les trois expressions suivantes:

$$X = f1(q), Y = f2(q), \theta = f3(q)$$

3. déterminer entièrement le modèle différentiel inverse $dq = J^{-1}(dX, dY, d\theta)$
 Comment trouver les singularités du robot (s'il en a !)
4. Exprimer en fonction de $f1$, $f2$, $f3$ la matrice homogène de passage de Ro à RE (repère attaché à la partie mobile).

11.6 TD robot parallèle spatial

Exercice 2 :

Le robot parallèle “ **ABB IRB 340** ” (cf. figure ci-dessous) , du constructeur ABB dispose de la structure du robot DELTA. Il a 4 degrés de liberté, et est constitué d’une base, fixe et solidaire d’un bâti, et d’une plate forme ou nacelle (plaque mobile) supportant le préhenseur. Quatre articulations motorisées permettent d’agir sur la position et l’orientation du préhenseur. Les 3 premières, de type pivot, permettent d’agir sur les chaînes cinématiques ayant une structure R-RR-RR (R de type pivot motorisée et les 2 RR de type rotule passives) et la quatrième permet d’orienter le préhenseur par pivotement autour de l’axe vertical.

Ce robot est destiné aux secteurs industriels nécessitant une souplesse élevée en matière d’automatisation (par exemple, pour effectuer des opérations de prise et de pose, ainsi que des opérations d’assemblage).

- Le robot parallèle “ ABB IRB 340 ”



Calculer les modèles géométriques direct et inverse de ce robot.

ANNEXES[KHALIL&DOMBRE1999]

Cet annexe décrit les formalismes des cosinus directeurs, des angles nautiques, du vecteur de rotation permettant la représentation de l'orientation d'un solide dans l'espace

- **RAPPELS**

- *1. Multiplication des transformations homogènes :*

Soit R_i un repère ayant subi des transformations consécutives connues $T_{k=1..n}$ qui l'amènent au repère R_j . La transformation finale T_{ij} exprimant le repère R_j dans le repère R_i est calculée selon deux cas de figures :

- Si les transformations $T_{k=1..n}$ sont exprimées par rapport au repère courant $R_{k=1..n}$, T_{ij} s'obtient par multiplications à droite : $T_{ij} = T_{12} T_{23} \dots T_{n-1 n}$
- Si les transformations $T_{k=1..n}$ sont exprimées par rapport au repère d'origine R_i , T_{ij} s'obtient par multiplications à gauche : $T_{ij} = T_{in} \dots T_{i2} T_{i1}$

- *2. Pré-produit vectoriel :*

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, leur produit vectoriel s'écrit :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$$

Il peut s'écrire, pour faciliter le développement, sous forme matricielle :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = X(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$X(\vec{u})$ est la *matrice du pré-produit vectoriel* de \vec{u} .

- **COSINUS DIRECTEURS**

Soit R une matrice orthogonale dans l'espace E^3 telle que :

$$R = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x \\ i_y & j_y & k_y \\ i_z & j_z & k_z \end{bmatrix} \quad (A3.1)$$

Ses éléments représentent les cosinus directeurs d'orientation de trois vecteurs. Elle ne contient que deux paramètres indépendants, car le vecteur \vec{k} se déduit par un produit vectoriel des deux autres dont la norme est égale à 1 et le produit scalaire $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Cette représentation redondante n'est pas optimale d'où l'intérêt de chercher d'autres formules pour exprimer la rotation.

- **ANGLES NAUTIQUES RTL (ROULIS–TANGAGE–LACET)**

Les angles de *Roulis – Tangage – Lacet* expriment l'orientation par trois rotations successives d'un repère autour de ses trois axes principaux (z, y puis x). Les trois rotations étant exprimées par rapport au repère courant, la rotation finale s'obtient par multiplications à droite :

$$R(\theta_z, \theta_y, \theta_x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad (A3.2)$$

θ_z , θ_y et θ_x sont les trois angles de rotations

d'où :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y)\cos(\theta_z) & \sin(\theta_x)\sin(\theta_y)\cos(\theta_z) - \cos(\theta_x)\sin(\theta_z) & \cos(\theta_x)\sin(\theta_y)\cos(\theta_z) + \sin(\theta_x)\sin(\theta_z) \\ \cos(\theta_y)\sin(\theta_z) & \sin(\theta_x)\sin(\theta_y)\sin(\theta_z) + \cos(\theta_x)\cos(\theta_z) & \cos(\theta_x)\sin(\theta_y)\sin(\theta_z) - \sin(\theta_x)\cos(\theta_z) \\ -\sin(\theta_y) & \sin(\theta_x)\cos(\theta_y) & \cos(\theta_x)\cos(\theta_y) \end{pmatrix}$$

L'avantage de ce formalisme est qu'il présente directement la commande d'un robot (la rotation autour de chaque axe signifie l'envoi direct d'une commande au moteur spécifique). L'inconvénient est que le produit des trois matrices dans l'équation (A3.2) n'est pas commutatif. L'ordre dans laquelle s'effectuent les trois rotations conditionne donc la valeur finale de la rotation. Un autre inconvénient majeur est que le problème inverse (trouver les trois angles à partir de R) présente plusieurs solutions et des positions singulières.

• **VECTEUR DE ROTATION**

Considérons une rotation $R(\vec{u}, \theta)$ autour d'un axe portant un vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$ passant par l'origine d'un repère R_i ($[\cdot]^T$ signifie transposé). Supposons que \vec{u} soit le vecteur unitaire suivant l'axe z d'un repère R_j dont l'origine est confondu avec R_i (Figure A3.1). R_j peut être obtenu à partir de R_i par deux rotations successives exprimées par la transformation suivante :

$${}^i T_j = R(\vec{z}, \alpha)R(\vec{x}, \beta) \quad (A3.3)$$

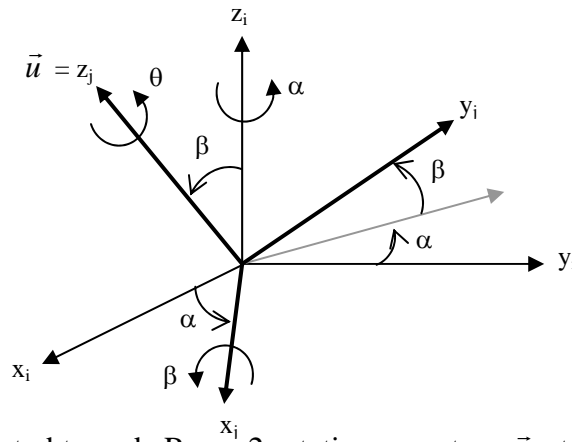


Figure A3.1 : R_j est obtenu de R_i par 2 rotations α autour \vec{z} et β autour \vec{x}

En développant la relation (A3.3), on obtient :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} \quad (A3.4)$$

Tourner autour de \vec{u} est équivalent à tourner autour de l'axe \vec{z} du repère R_j . Ceci revient à faire une transformation de R_i vers R_j , une rotation $R(\vec{z}, \theta)$ puis une transformation inverse vers R_i , on en déduit que :

$$R(\vec{u}, \theta) = R(\vec{z}, \alpha)R(\vec{x}, \beta)R(\vec{z}, \theta)R(\vec{x}, -\beta)R(\vec{z}, -\alpha)$$

Nous développons la formule précédente en tenant compte de la relation (A3.4) :

$$R(\vec{u}, \theta) = \begin{bmatrix} u_x^2(1 - C\theta) + C\theta & u_x u_y(1 - C\theta) - u_z S\theta & u_x u_z(1 - C\theta) + u_y S\theta \\ u_x u_y(1 - C\theta) + u_z S\theta & u_y^2(1 - C\theta) + C\theta & u_y u_z(1 - C\theta) - u_x S\theta \\ u_x u_z(1 - C\theta) - u_y S\theta & u_y u_z(1 - C\theta) + u_x S\theta & u_z^2(1 - C\theta) + C\theta \end{bmatrix} \quad (A3.5)$$

avec : $C\theta = \cos(\theta)$ et $S\theta = \sin(\theta)$. En utilisant la matrice du pré-produit vectoriel de \vec{u} , nous obtenons la formule de Rodrigues :

$$R(\vec{u}, \theta) = I_3 C\theta + S\theta X(\vec{u}) + (1 - C\theta)\vec{u}\vec{u}^T \quad (\text{A3.6 a})$$

$$R(\vec{u}, \theta) = I_3 + S\theta X(\vec{u}) + (1 - C\theta)(X(\vec{u}))^2 \quad (\text{A3.6 b})$$

Ces deux équations sont équivalentes, où I_3 représente la matrice unité d'ordre trois.

- *Problème inverse :*

Le problème inverse est celui de trouver le vecteur et l'angle de rotation correspondant à une matrice de rotation donnée. En faisant la somme des termes diagonaux dans les équations (A3.1) et (A3.5), on trouve :

$$C\theta = \frac{1}{2}(i_x + j_y + k_z - 1) \quad (\text{A3.7})$$

A partir des termes restants, il vient :

$$\left. \begin{aligned} 2u_x S\theta &= j_z - k_y \\ 2u_y S\theta &= k_x - i_z \\ 2u_z S\theta &= i_y - j_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.8})$$

d'où :

$$S\theta = \frac{1}{2} \sqrt{(j_z - k_y)^2 + (k_x - i_z)^2 + (i_y - j_x)^2} \quad (\text{A3.9})$$

L'angle est déduit : $\theta = \text{Arctan}(S\theta / C\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ (A3.10)

En analysant les signes dans l'équation (A3.8) et en utilisant les expressions de (A3.1) et de (A3.5), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \text{Signe}(j_z - k_y) \sqrt{(i_x - C\theta)/(1 - C\theta)} \\ u_y &= \text{Signe}(k_x - i_z) \sqrt{(j_y - C\theta)/(1 - C\theta)} \\ u_z &= \text{Signe}(i_y - j_x) \sqrt{(k_z - C\theta)/(1 - C\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.11})$$

Il existe donc deux solutions pour le problème inverse : $R(\vec{u}, \theta)$ et $R(-\vec{u}, -\theta)$. Un inconvénient remarqué est que la solution représente une singularité au voisinage de $\theta = 0$.