

Calcul de la dimension intrinsèque d'un système dynamique

Vincent Vigneron^{1,2}, Frédéric Davesne², Hichem Maaref², Alain Müller²

¹MATISSE-SAMOS UMR 8595
90, rue de Tolbiac
75634 Paris cedex 13
vigneron@univ-paris1.fr

²CEMIF
40 rue du Pelvoux
91020 Evry Courcouronnes
vvigne,davesne,maaref@iup.univ-evry.fr

Résumé

Dans cet article, on cherche à caractériser un système dynamique de manière quantitative à partir de sa *dimension intrinsèque*. La dimension intrinsèque d de l'espace d'état représente le nombre de coordonnées indépendantes décrivant la position d'un point sur l'attracteur, c'est donc le nombre de degrés de liberté minimum du système dynamique. Cette dimension est difficile à obtenir. Plusieurs méthodes ont été proposées pour la mesurer, notamment la dimension de corrélation et la dimension de Hausdorff-Besicovitch, qui se confond, à la limite, avec la capacité introduite par Kolmogoroff. Ces dimensions sont indépendantes de la fréquence avec laquelle une trajectoire visite les différentes parties de l'attracteur. Elles mesurent "simplement" l'intermittence dans ce système dynamique.

Le problème de l'estimation des dimensions pour des données empiriques est un problème complexe. Si d'un point de vue statistique celui-ci n'est apparu que récemment dans l'étude des systèmes dynamiques ¹, il fut au départ abordé d'un point de vue "physique". En particulier avec les travaux de Ceys et Pyragas ² qui ont mis au point une procédure permettant de déterminer le nombre de degrés de liberté minimum caractérisant un système dynamique chaotique. Il s'agit alors de trouver des segments de la série coïncidant dans un nombre de points finis m . La procédure est bien sûr locale et dépend fortement du segment initial. Afin de la rendre robuste, on peut calculer les déviations moyennes entre le segment initial et les autres segments, et déterminer ainsi le nombre m pour lesquels elles sont minimales. Les idées de base développées dans cette procédure ne sont pas éloignées de celles développées par Grassberger et Proccacia (1983) quand ils ont établi la procédure de calcul de la dimension de corrélation.

A travers une série d'expériences sur la courbe de Von Koch, nous démontrons que ces dimensions sont sensibles au bruit et à la nature du bruit, au nombre d'observations (qui doit être considérable), à la dimension de l'espace d'observation, etc., donc peu utilisables en l'état pour des applications d'ingénierie. Par contre, en observant que les graphes de ces dimensions ont l'allure de fonctions de répartition $F(x)$, l'étude de la densité associée $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ est beaucoup plus fructueuse. Si dans le cas précédent, on ne s'intéresse pas à la fréquence avec laquelle une trajectoire d'un attracteur visite les cubes, on rajoute ici une information supplémentaire en considérant la fréquence avec laquelle une orbite typique visite les différentes régions de l'attracteur.

¹SMITH L. A. - Intrinsic Limits on Dimension Calculations - Phys. Lett. A, Volume 133, 1988, pages 283-288.

²CEYS A. et PYRAGAS K. - Estimation of the number of degrees of freedom from chaotic time series - Phys Lett, 128, 1988, pages 227-230.

1 Introduction

Supposons que nous disposions d'une série d'observations x_1, \dots, x_n . Une première approche pour identifier un système consiste à observer la *trajectoire* du système. La construction d'un espace d'état à partir des observations permet de mieux appréhender le problème, dans la mesure où c'est dans cet espace que l'on peut espérer caractériser le système dynamique qui régit le phénomène observé, en faisant varier la dimension de l'espace d'état. L'approche la plus simple est de construire un pseudo-espace d'état, en considérant le vecteur de dimension d : x_t est construit à partir de l'observation elle-même et des $(d - 1)$ valeurs retards $X_t = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(d-1)\tau})$, où τ est la valeur du retard. Elle correspond à la *dimension paramétrique*. Dans l'exemple de la figure 1, le nuage de points a une dimension intrinsèque égale à 2 (les points formant une surface), alors que l'espace d'état est de dimension 3.

Plusieurs estimateurs de la dimension intrinsèque ont été proposés dans la littérature, *Toutes sont basées sur l'étude, en fonction de l'échelle, d'une propriété mesurable d'un nuage de points*. Citons :

1. la dimension de Hausdorff-Besicovitch : on recouvre l'espace d'état de dimension d par des cubes de côté r . Soit $N(r)$ le nombre de cubes nécessaires pour recouvrir cet espace, alors

$$d_H^{(q)} = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(r)} p_i(r)^q}{\log r} \quad (1)$$

où $p_i(r)$ la probabilité d'occupation de chaque boîte.

2. la dimension de *corrélation* : soient X_1, \dots, X_N , N vecteurs dans \mathbb{R}^d et définissons

$$C_N(r) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i I(\|X_i - X_j\| \leq r)}{N(N-1)/2}, \quad (2)$$

où $I(\cdot)$ désigne une fonction indicatrice et $\|X\| = \max_{i=1}^d |x_i|$, si $X = (x_1, \dots, x_d)^T$. Alors $d_C = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_N(r)}{\log r}$.

Cutler et Dawson³ obtiennent un estimateur consistant en utilisant la distance des plus proches voisins, notée ρ_n , définie par $\rho_n(x) = \min_{1 \leq \ell \leq n} \|x_\ell - x\|$, où x est un point de la trajectoire.

Dans ces définitions, la notion de "localité" a été transformée en un passage à la limite $r \rightarrow 0$. En pratique, comme la distribution étudiée possède un nombre fini d'échantillons, cette limite tendrait vers 0 (lorsqu'on n'a plus qu'un point dans chaque boîte, la diminution de r ne modifie plus le nombre de boîtes nécessaires). Il faut donc se contenter d'une longueur r "suffisamment" petite.

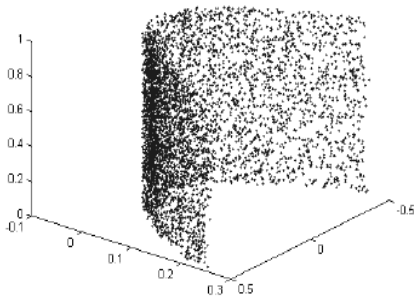


FIG. 1 – Distribution en fer à cheval.

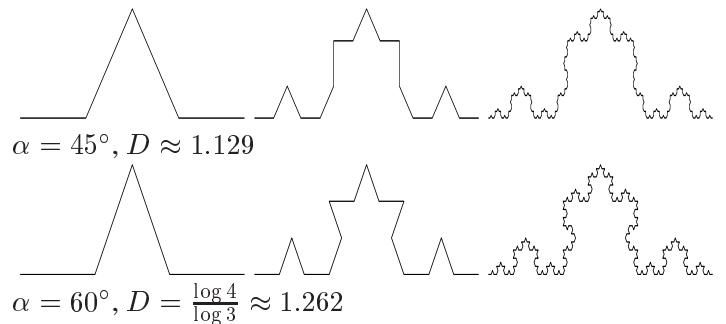


FIG. 2 - Courbes de Koch

³CUTLER C.D. et DAWSON D.A., "Nearest neighbor analysis of a family of fractal distributions", The Annals of Proba. 16, (1990), ppages 256-271.

2 Estimation des dimensions

Si l'on considère le flocon de neige obtenu à partir d'une suite infinie de transformations qui consiste, partant d'un triangle équilatéral, à diviser chaque coté en 3 parties, puis à construire 3 nouveaux triangles sur les tiers centraux et à réitérer *ad infinitum*, on obtient la courbe triadique de Koch (Figure 2) qui a pour dimension exacte d_H donnée par la formule :

$$d_H = \frac{\log 2}{\log (2 \cos \frac{\alpha}{2})} \quad (3)$$

Des variantes de cette courbe peuvent être obtenues en modifiant l'angle α que fait le second segment par rapport au premier. Pour obtenir la dimension d_H , on représente $\log N(r)$ par rapport à $\log r$ (cf. Figures 2.a) et on regarde sur quelle portion la courbe est approximativement linéaire. La pente obtenue (cf. Figures 2.b) définit la dimension intrinsèque.

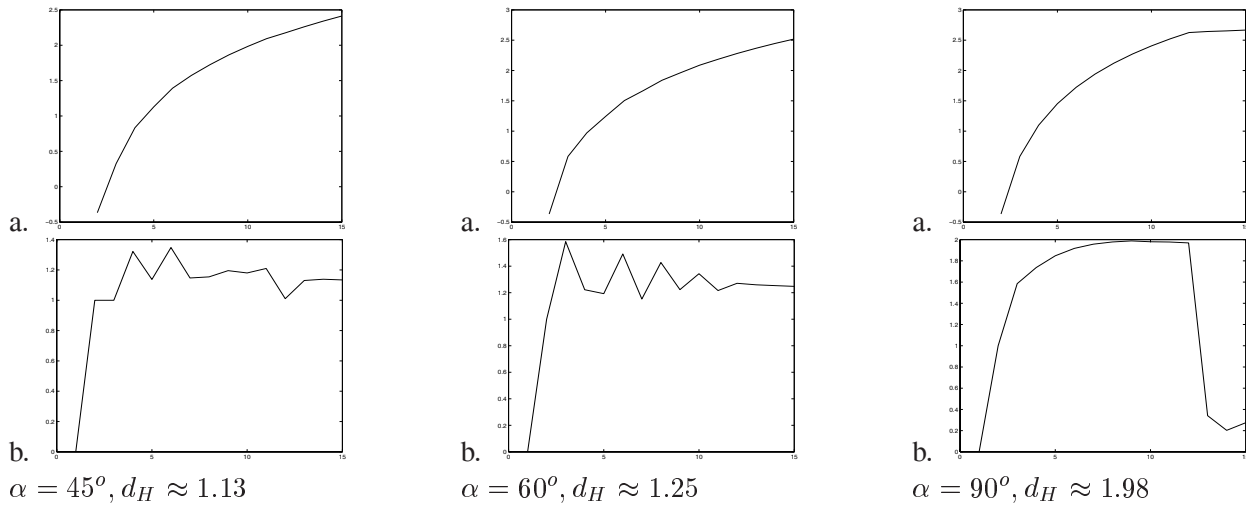


FIG. 2 – Variation de la dimension fractale d_H en fonction de α .

Dans toute la suite, les expériences utilisent un simulateur de courbes de Koch. La dimension de l'espace d'état est d_e . On génère un nuage de $n = 1.000.000$ de points dans un espace vectoriel de dimension d_h . Le rôle de la taille des échantillons, de la dimension de l'espace d'état, du bruit est fondamental pour s'assurer de la robustesse de ces estimateurs⁴.

1. *Rôle de d_b ($d_n = 1$)* : d_b n'a que peu d'influence sur l'estimation de d_H .
2. *Rôle de d_n sur l'estimation de d* : on obtient les estimations suivantes de d_H :

d_n réel	1	2	3	4	5
d_H obtenu	1	1.8	2.5	3	3.4

3. *Rôle du nombre de points* : une distribution nécessite un nombre de point minimum d'environ 10^5 (Figures 3).
4. *Rôle du bruit* : dans le cas où un système dynamique consiste en une orbite x_t bruitée par un bruit connu η_t . Les figures 4 a,b,c montrent pour les distributions fortement bruitées par un bruit gaussien $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ que la dimension d_H augmente (alors que la théorie montre qu'elle se stabilise (si le nombre de points est suffisant). Dans le cas de bruit blanc (Figures 4 d,e,f), d_H est sur-estimée dans tous les cas. Par ailleurs, pour une échelle d'observation relativement réduite, on mesure déjà la dimension du bruit qui est ici de 2.

⁴HENTSCHEL H. G. E. et PROCACCIA I. - The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors - Physica 8D, 1983, pages 435-444.

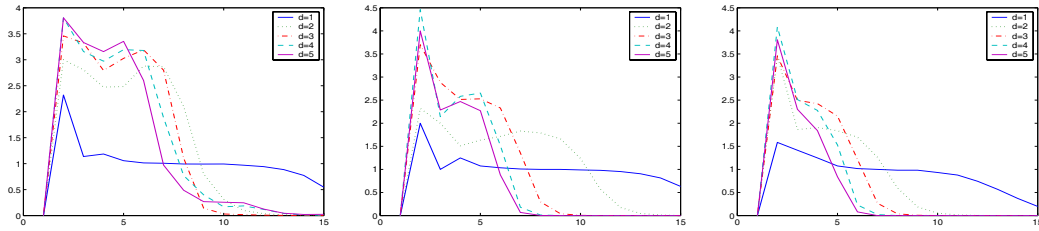


FIG. 3 – Influence de n ($n = 10^6$, $n = 10^5$ et $n = 10^4$) sur la précision de l'estimation (non-bruïté).

3 Densité de dimension

Plusieurs problèmes se posent dans l'estimation des dimensions, dont le temps de calcul, de l'ordre de n^2 pour un échantillon de taille n . Pour de longues séries, le problème est loin d'être négligeable. Nous introduisons ici la "densité de dimension" que l'on définit comme suit : à partir d'un n -échantillon X_1, \dots, X_n de v.a. réelles calculées à partir de $r = 1, \dots, n$, la courbe exprimant $\log C(r)$ par rapport à $\log r$ définit une fonction de répartition $F(X)$ (F est en effet monotone croissante) de densité $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Nous considérons l'estimation de la densité f par une méthode de noyaux adaptée au cas d'un échantillon érroné, *i.e.* on suppose que pour tout i , $X_i = Y_i + Z_i$, avec $Y_i \sim f_Y$, la densité d'intérêt, et où $Z_i \sim f_Z$ (f_Z connue) représente l'erreur de mesure indépendante de Y_i . Pour assurer la consistance de l'estimateur à noyau de f_Y construit sur la base de l'échantillon X_1, \dots, X_n on utilise un estimateur modifié appelé l'estimateur à noyau de déconvolution⁵. Notons que le support de f_Y n'est pas toute la droite réelle, mais un intervalle limité à droite et à gauche.

Nous proposons un test d'adéquation de f à une densité donnée f_0 . Pour la construction de ce test, on considère une collection de sous-espace vectorielle sur $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ notée $\{\mathcal{S}_D, D \in \mathcal{J}\}$ et on désigne par $\{p_{k,D}, k \in \mathcal{L}_D\}$ une base orthonormée de \mathcal{S}_D . La projection orthogonale sur \mathcal{S}_D est notée f_D . On estime

$$\hat{\theta}_D \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k \in \mathcal{L}_D} \sum_{i \neq j=1}^n p_{k,D}(X_i) p_{k,D}(X_j) + \int f_0^2(x) dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_0(X_i).$$

Nous pouvons écrire alors construire un test de niveau $\alpha_D, \forall D$ de l'hypothèse " $f = f_0$ " en rejetant cette hypothèse si $\hat{\theta}_D$ dépasse son $(1 - \alpha_D)$ -quantile sous l'hypothèse " $f = f_0$ ". Nous disposons ainsi d'une collection de tests et nous décidons de rejeter l'hypothèse " $f = f_0$ " si pour l'un des tests de la collection, cette hypothèse est rejetée.

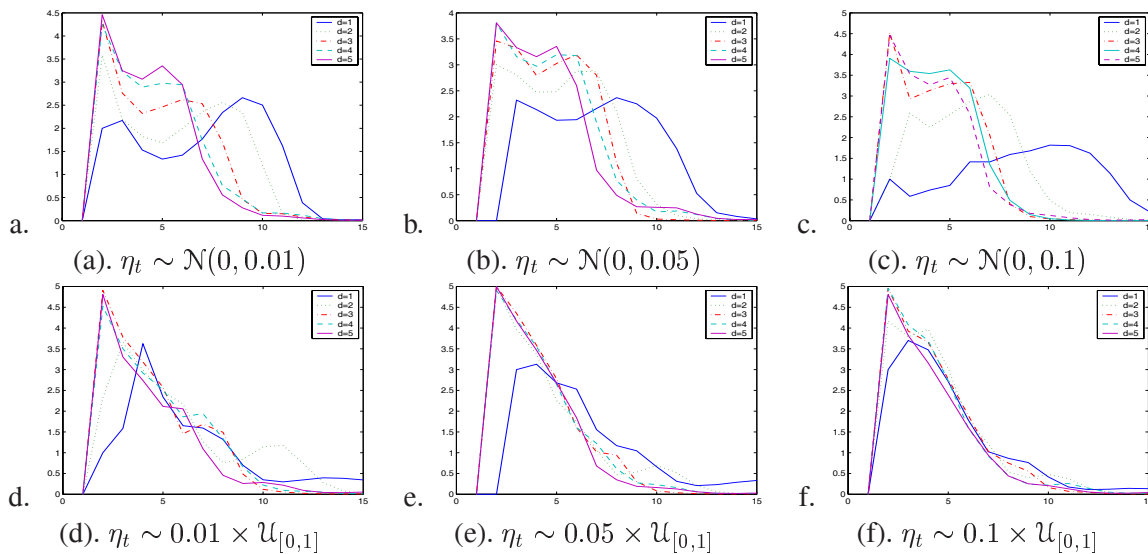


FIG. 4 – Représentation de la pente pour différentes valeurs de d_n et plusieurs bruits ($n = 1,000,000$, $d_b = 5$).

⁵STEFANSKI L. et CARROLL, R.J. (1990). Déconvolution kernel density estimators, *Statistics*, 2, 169-184.